

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

**“OLIIY MATEMATIKA.
EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA”
fani bo‘yicha
II-SEMESTR UCHUN
O‘QUV-USLUBIY MAJMUA**

TOSHKENT-2016

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

**“OLIY MATEMATIKA.
EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK
STATISTIKA”**

fani bo‘yicha

**II-SEMESTR UCHUN
O‘QUV-USLUBIY MAJMUA**

Mazkur o'quv uslubiy majmua Oliy va o'rta maxsus ta'limi vazirligining 20____yil
_____dagi _____-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan o'quv reja va dastur asosida
tayyorlandi

Tuzuvchilar:

TATU dotsenti R.R.Raxmatov
TATU kata o'qituvchisi SH.E. Tadjibayeva
TATU assistenti S.K.Shoyimardonov
(OTM nomi, pedagogning ilmiy darajasi, F.I.O)

O'quv-uslubiy majmua Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Ilmiy-uslubiy
kengashinig 2016 yil _____dagi _____-sonli qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan

MUNDARIJA

1. FANNING O‘QUV DASTURI.....	5
1.1. NA’MUNAVIY FANDASTURI.....	5
1.2. FANNING ISHCHI-O‘QUV DASTURI.....	20
2. O‘QUV-USLUBIY MATERIALLARI.....	49
2.1. NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MATERIALLARI.....	49
2.2. AMALIY MASHG‘ULOTLAR MATERIALLARI.....	241
3. GLOSSARIY.....	288
4. FAN BO‘YICHA XORIJIY ADABIYOTLAR (elektron shaklda)	
5. HAR BIR MAVZU UCHUN TAQDIMOTLAR (elektron shaklda)	
6. QO‘SHIMCHA O‘QUV VA ILMIY MATERIALLAR (MAQOLALAR)	
(elektron shaklda)	
7. MAVZUNI O‘ZLASHTIRILISHI UCHUN QO‘SHIMCHA VIDEOLAR,	
KEYS-STADILAR VA HOKAZO MATERIALLAR (elektron shaklda)	

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

Ro‘yxatga olindi:

Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

№ _____

201__yil “_____” _____

201__yil “_____” _____

**OLIJ MATEMATIKA. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA
MATEMATIK STATISTIKA**

FAN DASTURI

Bilim sohasi: 300 000 - Ishlab chiqarish texnik soha.

Ta’lim sohasi: 330 000 - Kompyuter texnologiyalari va informatika”;

350 000 - Aloqa va axborotlashtirish,
telekommunikatsiya texnologiyalari.

Talim yo‘nalishi: 5330 500 - Kompyuter injiniringi (“Kompyuter
injiniringi”, “AT-servis”, “Axborot
xavfsizligi”, “Multimedia
texnologiyalari”);

5330300 - Axborot xavfsizligi (Axborot, kommunikatsiya
texnologiyalari va servis);

5330600 - Dasturiy injiniring;

5350100 - Telekommunikatsiya texnologiyalari
 (“Telekommunikatsiyalar”,

“Teleradioeshittirish”, Mobil tizimlari);

5350200 - Televizion texnologiyalar

(“Audiovizual texnologiyalar”, “Telestudiya
tizimlari va ilovalari”);

5350300 - Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari

sohasida iqtisodiyot va menejment;

5350400 - Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari

sohasida kasb ta’limi;

5350500 - Pochta aloqasi texnologiyasi;

5350600 - Axborotlashtirish va kutubxonashunoslik.

Toshkent 2016

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus talim vazirligining 201__yil “__” _____dagi “__” – sonli buyrug‘ining _____ ilovasi bilan fan dasturi ro‘yxati tasdiqlangan.

Fan dasturi Oliy va o‘rta maxsus, kasb-xunar ta’limi yo‘nalishlari bo‘yicha O‘quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi kengashining 201__ yil “__” _____dagi ____ -sonli bayonnomasi bilan maqullangan

Fan dasturi Toshkent axborot texnologiyalari universitetida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

- | | | |
|-----------------|---|--|
| Raxmatov R.R. | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası mudiri, f.-m.f.n.; |
| Norxo‘jaev O.O. | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası dotsenti, f.-m.f.n.; |
| Mamatov A.E. | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası dotsenti, f.-m.f.n.; |
| Chay Z.S. | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası katta o‘qituvchisi, f.-m.f.n.; |
| Islamova O.A | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası katta o‘qituvchisi, f.-m.f.n. |

Taqrizchilar:

- | | | |
|-----------------|---|--|
| Jabborov N.N. | - | |
| Abduvoitov H.A. | - | M.Ulug‘bek nomli O‘zMU, “Matematik tahlil” kafedrası mudiri, dotsent, f.-m.f.n.; |
| | | TATU “Algoritmlash va matematik modellashirish” kafedrası dotsenti, f.-m.f.n.. |

Fan dasturi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Ilmiy-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqilgan va tavsiya etilgan. (201__ yil “__” _____dagi “__” – sonli bayonnomasi).

Kirish

Ushbu dastur “Ta’lim to’g’risida” hamda “Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi to’g’risida”gi O‘zbekiston Respublikasi qonunlariga muvofiq amalga oshirildi. Oliy matematika fanining asosiy maqsadlaridan biri - hozirgi davr talabiga javob beradigan mutaxassislarni tayyorlashdir. Dastur oliy matematika kursi qismlari va mavzularining asosiy mazmunlarini o‘z ichiga oladi va ularni semestrlar bo‘yicha taqsimlash asosida maxsus va kasbiy fanlar uchun oliy matematika kursining mantiqiy izchilligi va to‘laligini ta’minlaydi.

Fanning maqsad va vazifalari

Ta’lim maqsadi davr bilan, ijtimoiy hayot bilan uzviy bog‘liq. Ijtimoiy hayotdagi tub burilishlar, fanning intensiv rivojlanishi, ta’lim modernizatsiyasi, yangi didaktik imkoniyatlar, insonparvarlashtirish shubhasiz ta’lim maqsadini ham tubdan o‘zgartirdi. Ta’lim maqsadining tubdan o‘zgarishi ta’lim mazmunida o‘z ifodasini topadi. Oliy matematika fani mazmuniga chiziqli algebra elementlari, tekislik va fazodagi analitik geometriya, vektorlar algebrasi, bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning differensial hisobi, integral hisob elementlari, birinchi va ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar hamda qatorlar nazariyasi, karrali, egri chiziqli integrallar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo‘limlari kiritilgan.

Fanni o‘qitishdan maqsad - talabalarda mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlash, matematik taffakkurini shakllantirish va rivojlantirish, o‘zining fikr-mulohaza, xulosalarini asosli tarzda aniq bayon etishga o‘rgatish hamda egallangan bilimlar bo‘yicha, ko‘nikma va malakalarni shakllantirishdir.

Fanning vazifasi - talabalarga umumilmiy, muhandislik va maxsus fanlarni o‘zlashtirish hamda matematik usullarni muhandislik ishlariga tadbiq qilish. Nazariy va amaliy masalalarini yecha olishga yetarli bo‘lgan matematik apraratni egallashga va uni qo‘llashga, shuningdek, muhandislik masalalarining matematik modelini tuzish hamda ularni tahlil qilishga o‘rgatishdan iborat.

Fan bo‘yicha talabalarning tasavvur, bilim, ko‘nikma va malakalariga qo‘yiladigan talablar

“Oliy matematika” fanini o‘zlashtirish jarayonida bakalavr:

- matritsalarini ko‘paytirish, determinantlarni hisoblash, matritsa rangi va teskari matritsani topishni;
- chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini turli usullar bilan yechishni;
- chiziqli va evklid fazolarning ta’riflarini aniq bilishi, vektorlarning chiziqli bog‘liq va chiziqli erkliligini, vektorlar sistemasining rangi va bazisi topishni;
- analitik geometriya elementlarini va ikkinchi tartibli egri chiziqlarni, ularning tenglamalari bo‘yicha tahlil etishni;

- chiziqli operator va kvadratik formalar, differensial va integral hisob, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, differensial tenglamalar, operatsion hisob, karrali, egri chiziqli integrallarni hisoblashni;
- tasodifiy hodisa va murakkab hodisa ehtimolliklarini topishni;
- tasodifiy miqdor taqsimoti va xarakteristikalarini topishni;
- statistik ma'lumotlarni tahlil qilishni;
- noma'lum parametrlarni baxolashni;
- statistik gipotezalarni tekshirishni;
- korrelyatsion va regression taxlilni amalga oshirishni bilishlari kerak.

Bular bilan bir qatorda bakalavr:

- amaliy masalalarda matematik tekshirishning boshlang'ich ko'nikmasini ishlab chiqish (hayotiy masalalarning matematik modelini qurish, uni tekshirish va yechishning qulay usulini tanlash, olingan natijalarni baholash, qo'llash va hokazolar);
- mavjud matematik paketlar yoki axborot texnologiyalardan foydalana olish;
- mavzuga doir misol va masalalarni yechishga mos qulay usulni topa olish;
- matematik masalalarni yechish usullarini mukammal o'zlashtirib, yechimlarni amaliyotda qo'llanish ko'rinishigacha yetkazish (formula, son, grafik va hokazo) va natijada logik va algoritmik fikrlash qobiliyatiga ega bo'lishi kerak;
- talaba mutaxassisligi bilan bog'liq adabiyotlarda uchraydigan matematik apparat tushunchalarini mustaqil tahlil qila olishi, shuningdek, Oliy matematika fanidan olingan bilimlarni mutaxassisligi bilan bog'lay olishi kerak;
- o'z fikr-mulohaza va xulosalarini asosli tarzda aniq bayon eta olish malakalariga ega bo'lishi kerak.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Oliy matematika fani tabiiy-matematik fanlar majmuasiga taalluqli bo'lib, talabalar uni I, II va IV semestrlarda o'rganishadi.

Bu dasturni amalda bajarish uchun talabalar institutgacha bo'lgan davrda elementar matematikadan yetarlicha ma'lumotga ega bo'lishlari lozim.

Oliy matematikaning umumiy kursi bakalavrlar uchun matematik ta'limning asosi bo'lib, shu asosda matematik usullarni kasbiy faoliyatda tatbiq etishlari uchun uni fizika, informatika, axborot texnologiyalari va boshqa fanlar bilan uzviy bog'liqlikda o'rgatish maqsadga muvofiq.

Fanning ishlab chiqarishdagi o'rni

Oliy matematika kursi ishlab chiqarish jarayoni bilan bevosita bog‘lanmagan. Lekin u ishlab chiqarishni takomillashtirish bo‘yicha muqobil qarorlar qabul qilishda qo‘llaniladigan sonli usullarni o‘rgatadi shu asosda halq ho‘jaligi hamda texnikaning rivojlanishida asosiy va alohida o‘rinni egallaydi.

Bunda berilgan ob‘ektning xususiyatlaridan kelib chiqqan holda asosiy parametrlar ajratiladi, so‘ngra ularning o‘zgarish qonuniyatlari va xossalariidan foydalanib, matematik model tuziladi. Modelning muhim parametrlari aniqlanib, tegishli matematik usullar yordamida shu model uchun masalaning maqbul yechimi topiladi.

Fanni o‘qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Talabalarning oliy matematika fanini o‘zlashtirishlari uchun o‘qitishning zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informatsion (Scientific Work Place, Matlap, Mathcad, Mathematica paketlar dasturi va h.k.) va pedagogik texnologiyalarni tatbiq qilish muxim ahamiyatga egadir. Fanni o‘zlashtirishda darslik, o‘quv va uslubiy qo‘llanmalar, ma’ruza matnlari, texnologiyalar majmuasi, elektron materiallar, virtual stendlar va maketlaridan foydalaniladi. Ma’ruza, amaliy darslarida mos ravishdagi pedagogik va axborot texnologiyalaridan foydalaniladi.

ASOSIY QISM:

Fanning nazariy mashg‘ulotlari mazmuni

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo‘yicha talabalarga DTS asosida o‘tkazilishi zarur bo‘lgan bilim va ko‘nikmalar to‘la qamrab olishishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo‘yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo‘layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o‘zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalaridagi islohatlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so‘ngi yutuqlari e’tiborga olinishi tavsiya etiladi.

“Oliy matematika” fannining predmet va vazifalari. Matematika – amaliy masalarni yechishda eng kuchli vosita, fanlarning universal tili va ilmiy dunyoqarashning katta bir bo‘lagi. Tabiatda ro‘y beradigan jarayonlarni modellashtrish haqida eng sodda tushunchalar.

Chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari. 2, 3-tartibli determinantlar va ularning xossalari. p – tartibli determinantlar. Hisoblash usullari. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa, matritsa rangi. Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari va ularni matritsalar orqali yozish hamda yechish. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning Kramer, matritsa va Gauss usullari.

Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorning o‘qdagi proeksiyasi. Yo‘naltiruvchi kosinuslar. Vektorlar sistemasining chiziqli bog‘liq va bog‘liqmasligi. Bazis. Dekart koordinatalar sistemi. Vektorni koordinata o‘qlarida tashkil etuvchilar bo‘yicha yoyish. Qutb koordinatalar sistemi.

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi, mexanik ma‘nosi, uning xossalari. Vektorning uzunligi, vektorlar orasidagi burchak, vektorlarning ortogonallik sharti.

Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi, uning xossalari.

Vektor ko‘paytmaning mexanik ma‘nosi. Ikki vektorning kollinearlik sharti. Uchta vektorning aralash ko‘paytmasi, uning xossasi, geometrik ma‘nosi. Uch vektorning komplanarlik sharti.

Analitik geometriya (tekislikda). Tekislikda to‘g‘ri chiziqlarning turli ko‘rinishdagi tenglamalari. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikki to‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa bo‘lgan masofa.

Ikkinchi tartibli chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning tenglamalari.

Analitik geometriya (fazoda). Tekislik. Tekislikning turli ko‘rinishdagi tenglamalari. Ikki tekislik orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik sharti. Nuqtadan tekislikka bo‘lgan masofa. Fazoda to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalari. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashuvi.

Matematik analizga kirish. Haqiqiy sonlar to‘plami. Kompleks sonlar. Kompleks sonlarni tasvirlash. Kompleks sonning moduli va argumenti. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Eyler formulasi. Kompleks sonning ko‘rsatkichli shakli. Kompleks sonni darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish.

Chegaralangan, chegaralanmagan, chekli, cheksiz, sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar. Funksiya, funksiya haqida tushuncha. Asosiy elementar funksiyalar, ularning grafiklari.

Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti. Chegaralangan monoton ketma-ketlik limitining mavjudligi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Limitlarning algebraik xossalari. Limitlar haqidagi teoremlar. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar.

Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar, ularning xossalari. Cheksiz kichik miqdorlarni solishtirish.

Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi. Funksiyaning uzilish nuqtalari. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalari.

Bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi, hosilani topish qoidalari. Funksiyaning differensial, hosilaning va differensialning geometrik va fizik ma'nolari. Funksiya grafigiga berilgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari.

Murakkab va teskari funksiyalarning hosilalari. Oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash. Differensial formasining invariantligi, yuqori tartibli hosila va differensiallar.

Roll, Lagranj, Koshi teoremlari va ularni qo'llanilishi.

Aniqmasliklarni ochishning Lopital qoidasi.

Funksiyaning monotonlik sharti. Funksiyaning ekstremumi, ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va burilish nuqtalari. Funksiya grafigining asimptotalari.

Funksiyani tekshirishning va grafigini yasashning umumiy sxemasi va uning tadbiqu.

Integral hisob. Ko'phadlar. Algebraning asosiy teoremasi. Bezu teoremasi. Haqiqiy koeffitsientli ko'phadlarni chiziqli va kvadratik ko'paytuvchilarga ajratish.

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integrallar. Integrallar xossalari va jadvali. Integrallarni hisoblashda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash. Integral osti funksiyalari turli bo'lgan hollarda integrallash usullari.

Aniq integral tushunchasiga keltiruvchi masalalar. Aniq integralning ta'rifi va uning xossalari. Aniq integralning geometrik va fizik ma'nosi.

Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral. N'yuton-Leybnis formulasi. Aniq integrallarni hisoblash.

Xosmas integrallar. Chegaralari cheksiz bo'lgan xosmas integrallar. Uzilishga ega bo'lgan xosmas integrallarning asosiy xossalari. Funksiyalarning xosmas integrallari, ularni hisoblash usullari, yaqinlashish alomatlar. Absolyut va shartli yaqinlashishlar.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida tushuncha. Aniqlanish sohasi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning limiti va uzluksizligi.

Xususiy hosilalar. To'la differensial. Sirtga o'tkazilgan urinma tekislik va normal.

Yuqori tartibli xususiy hosilalar va to'la differensiallar.

Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Oshkormas funksiyaning differensiallash. Aralash hosilalarning tengligi haqidagi teorema.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumi. Ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari.

Shartli ekstremum. Lagranjning ko'paytuvchilar usuli. Optimal yechimlarni topishga doir misollarni qo'llash.

Oddiy differensial tenglamalar. Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. Birinchi tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Yechimlarning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema. O'zgaruvchilari ajraladigan 1–tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamaning turlari va yechish usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar. Umumiy yechim xaqida teorema. Ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli. O'ng tarafi maxsus ko'rinishda bo'lgan o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar. Differensial tenglamalar sistemasi. Differensial tenglamalar sistemasi va yuqori tartibli differensial tenglamalar orasida bog'lanish.

Operatsion hisob. Laplas almashtirishi. Asl va tasvir. Tasvirlar xossalari, tasvirlar jadvali. Operatsion xisobning asosiy teoremlari. Tasvirga ko'ra aslni tiklash usullari. Originallar o'ramasi va uning xossalari. Dyumel integrali. Differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish usullari. Operatsion hisobni injenerlik masalalariga tadbiqu.

Sonli qatorlar. Sonli qatorlar haqida tushuncha. Qator yaqinlashishi va yig'indisi. Qatorlar ustida amallar. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari. Ishorasi almashinuvchi qatorlar, Leybnis alomati. Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.

Funksional qatorlar. Funksional qatorlar haqida tushuncha. Yaqinlashish va tekis yaqinlashish tushunchalari. Veyershtas alomati. Tekis yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Darajali qatorlarning xossalari. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Darajali qatorlarni differensiallash va integrallash. $(x - a)$ ning darajalari bo'yicha qator. Teylor va Makloren qatorlari. Elementar funksiyalarni Makloren qatoriga yoyish. Binomial qator, $\ln(1 + x)$ funksiyaning darajali qatorga yoyish. Logarifmlarni hisoblash. Aniq integralni qator yordamida hisoblash. Differensial tenglamalarni qator yordamida yechish.

Fure qatori. Fure qatorlari haqida tushuncha, trigonometrik funksiyalar sistemasi. Funksiyalarni Fure qatoriga yoyish. Fure integrali. Kompleks ko'rinishdagi Fure integrali. Furening kosinus va sinus almashtirishlari.

Karrali, egri chiziqli va sirt integrallari. Ikki va uch karrali integrallar ta'rifi. Mavjudlik va o'rta qiymat haqidagi teoremlar. Karrali integrallarda o'zgaruvchilarni

almashtirish. Qutb, silindrik va sferik koordinat sistemalariga o'tish usuli. Dekart koordinat sistemasida karrali integrallarni hisoblash.

1- va 2- tur egri chiziqli integrallar, ularning asosiy xossalari va hisoblash usullari. Grin formulasi. Egri chiziqli integrallarning integrallash yo'liga bog'lik bo'lmashlik sharti. 1- va 2- tur sirt integrallar, ularning xossalari va hisoblash usullari.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Tasodifiylik va qonuniyat. Tasodifiy hodisa va ular ustida amallar. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar algebrasi.

Ehtimollikning klassik, geometrik, statistik ta'riflari. Ehtimollikning aksiomatik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. To'la ehtimol va Bayes formulalari.

Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari.

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang'ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.

Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

Ko'p o'chovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To'g'ri to'rtburchakda tekis taqsimlangan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Katta sonlar qonuni. Chebishev tengsizligi. Chebishev va Bernulli teoremlari. Markaziy limit teoremasi.

Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma taxlili. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va gistogramma. Taqsimot parametrlarining statistik baxolari. Siljimas, effektiv va asosli baholar.

Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlar va haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko'rsatkichli va normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.

Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish soxasi. Kritik nuqtalar. Statistik taxminlarni tekshirishda Pirson va Kolmogorov usullari.

Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalarni aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini aniqlashning yig'indilar va eng kichik kvadratlar usuli.

Amaliy mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha ko'rsatmalar

Amaliy mashg'ulotlarda talabalar oliy matematika fanidan olgan nazariy bilimlarini mustahkamlaydilar. Amaliy mashg'ulotlarda yechiladigan misol va masalalar quyidagi prinsiplarga asosan tanlanadi: tipik misol va masalalarni yechishga malaka hosil qildiruvchi, fanning mohiyatini anglatuvchi va mavzular orasidagi bog'liqlikni ifodalovchi ma'lum miqdordagi misol va masalalar tanlanadi.

Amaliy mashg'ulotlarning taxminiy ro'yxati

- Matritsa va determinantlar;
- Chiziqli tenglamalar sistemasi;
- R^n fazoda vektorlar sistemasi;
- To'g'ri chiziq va tekislik;
- Ikkinchi tartibli chiziqlar;
- Chiziqli va Evklid fazolari;
- Chiziqli va Evklid fazolarda chiziqli operatorlar;
- Ketma – ketlik limiti;
- Funksiya limiti;
- Hosila va differensiallar;
- Aniqmas integral;
- Aniq integral;
- Xosmas integral;
- Birinchi tartibli differensial tenglamalar;
- Yuqori tartibli differensial tenglamalar;
- Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar;
- Differensial tenglamalar sistemasi;
- Operatsion hisob;
- Sonli qatorlar;
- Funksional qatorlar;
- Fure qatori;
- Karrali, egri chiziqli integrallar;
- Tasodifiy hodisa ehtimolligi ta'riflari;
- Shartli ehtimollik. To'la ehtimol va Bayes formulalari;

- Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi;
- Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar, taqsimot qonuni va sonli xarakteristikalar;
- Tasodifiy miqdorlar bog‘liqsizligi, tasodifiy vektor.
- Tanlanma tahlili;
- Noma’lum parametrlarni baholash;
- Statistik taxminlarni tekshirish;
- Korrelyatsion va regression taxlil.

Laboratoriya ishlarini tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatmalar

Fan bo‘yicha laboratoriya ishlari namunaviy o‘quv rejada ko‘zda tutilmagan.

Kurs ishini tashkil etish bo‘yicha uslubiy ko‘rsatmalar

Fan bo‘yicha kurs ishi namunaviy o‘quv rejasida rejalashtirilmagan.

Mustaqil ta’limning shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ishining asosiy maqsadi – o‘qituvchining rahbarligi va nazoratida muayyan o‘quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko‘nikmalarni shakllantirish va rivojlantirish.

Talaba mustaqil ishini tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalaniladi:

- ayrim nazariy mavzularni o‘quv adabiyotlari yordamida mustaqil o‘zlashtirish;
- berilgan mavzular bo‘yicha axborot (referat) tayyorlash;
- nazariy bilimlarni amaliyotda qo‘llash;
- maket, model va namunalar yaratish;
- ilmiy maqola, anjumanga ma’ruza tayyorlash va h.k..

Amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha kafedra professor – o‘qituvchilari tomonidan ko‘rsatma va tavsiyalar, masalalar to‘plami ishlab chiqiladi. Unda talabalarga asosiy ma’ruza mavzulari bo‘yicha amaliy masala va misollar yechish uslubi va mustaqil yechish uchun masalalar keltirildi.

Tavsiya etilayotgan mustaqil ishlarning mavzulari

1. 2 – tartibli egri chiziqlar va sirtlar.
2. Funktsiyalarni tekshirish. Murakkab funksiyalar grafigini chizish usullari.
3. Aniq integrallar yordamida geometrik va fizik masalalarni yechish hamda ularni tahlil qilish.

4. Shartli ekstremum. Chegaralangan yopiq soxada ikki o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish.
5. Darajali qatorlarning funksiyalarni, aniq integrallarni hisoblashga va differensial tenglamalarni yechishga tatbiqi.
6. Karrali, egri chiziqli va sirt integrallari yordamida geometrik va fizik masalalarni yechish hamda ularni tahlil qilish.
7. Erlang, Pirson, Veybulla va Releya qonunlari.
8. Ko'p o'lchovli normal va tekis taqsimot qonunlari.
9. Xarakteristik va hosil qiluvchi funksiyalar.
10. Ko'p o'lchovli tanlanmaning statistik taxlili.

Dasturning informatsion – uslubiy ta’minoti

Mazkur fanni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy ilg‘or interfaol usullaridan, pedagogik va axborot – kommunikatsiya texnologiyalarining prezentatsiya (taqdimot), multimedia va elektron-didaktik texnologiyalardan foydalaniladi. Amaliy mashg‘ulotlarda aqliy hujum, klaster, blis-so‘rov, guruh bilan ishlash, insert, taqdimot, keys stadi kabi usul va texnikalardan keng foydalaniladi.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro‘yxati

Asosiy adabiyotlar:

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
2. Jo‘raev T., Sa’dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.1., Toshkent, “O‘qituvchi”, 1995.
3. Jo‘raev T., Sa’dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.2., Toshkent, “O‘zbekiston”, 1999.
4. Soatov Yo.U Oliy matematika. T., O‘qituvchi, 1995. 1- 5 qismlar.
5. N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010.
6. Latipov X.R., Tadjiev Sh. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, "O‘zbekiston". 1995.
7. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O‘qituvchi, 2001.

Qo‘shimcha adabiyotlar:

1. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz, - Toshkent.: O‘qituvchi, 1-qism, 1989.
2. Latipov X.R., Nosirov F.U., Tadjiev Sh.A. Analitik geometriya va chiziqli algebradan masalalar yechish bo‘yicha qo‘llanma. Toshkent, Fan, 1999.
3. A.Yusupov, X.A.Axmedova, A.Tilavov. «Ko‘p argumentli funksiyalarning integrallari. Maydonlar nazariyasi». Toshkent, 2011.
4. Piskunov N.S. Differentsialnoe i integralnoe ischislenie dlya VTUZov. -M.: Nauka, v 2x chastyax, 2001.
5. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo‘llanma. Toshkent, O‘qituvchi, 2001.
6. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi kursi. T. O‘qituvchi, 1980.
7. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Differentsialnie uravneniya. Kratnye integrali. Radi. Funksii kompleksnogo peremennogo. - Nauka, 1997.
8. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Elementi lineynoy algebri i analiticheskoy geometrii. - M.: Nauka, 1988.
9. Kletenik D.V. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. - M-: Nauka, 1986.

10. Danko P.S., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. V 2 ch. - M.: Visshaya; shkola, 1998. -ch. 1, 2.
11. `Berman G.N. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. –M.-: Nauka, 1985.
12. Minorskiy V.I. Sbornik zadach po visshey matematike. M: Nauka, 1987.
13. Beklemeshev D.V., Petrovich A.Yu., Chuberov I.A. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii i lineynoy algebre. -M.: Nauka, 1987.
14. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Sbornik zadach po vysshey matematike, uchebnoe posobie dlya injenerno texnicheskix spetsialnostey vuzov. - M.: Nauka. 1997.
15. Kolde U.K. Praktikum po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. –M. “Visshaya shkola”, 1991.

Internet saytlari

1. www.Ziyonet.uz
2. www.tuit.uz
3. www.Math.uz
4. www.bilim.uz
5. www.gov.uz

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA-MAXSUS TA’LIMI VAZIRLIGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI**

Ro‘yxatga olindi: “TASDIQLAYMAN”
O‘quv ishlari bo‘yicha birinchi
prorektor

№ _____

201__ yil «__» _____ 201__ yil «__» _____

**OLIIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK
STATISTIKA
FANINING
ISHCHI-O‘QUV DASTURI**

Bilim sohasi: 300000-Ishlab chiqarish-texnik soha;

Ta’lim sohasi: 330000-Kompyuter texnologiyalari va informatika;

Ta’lim yo‘nalishi: 5330500 – Kompyuter injiniringi (“Kompyuter
injiniringi”, “AT-servis”, “Multimedia texnologiyalari”);

5330300 – Axborot xavfsizligi;

5330600 – Dasturiy injiniring;

Ta’lim sohasi: 350000-Aloqa va axborotlashtirish, Telekommunikatsiya
texnologiyalari;

Ta’lim yo‘nalishi: 5350100 – Telekommunikatsiya texnologiyalari

(“Telekommunikatsiyalar”, “Teleradioeshittirish”, Mobil tizimlari);

5350200 – Televizion texnologiyalar (“Audioviziual texnologiyalar”, “Telestudiya tizimlari va ilovalari”);

5350300 – Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida iqtisodiyot va menejment;

5350400 – Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida kasb ta’limi;

5350500 – Pochta aloqasi texnologiyasi;

5350600 – Axborotlashtirish va kutubxonashunoslik.

Ishchi o'quv dastur O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 2016 yil 09.01 da tasdiqlangan, texnika oliy o'quv yurtlarida tayyorlanadigan bakalavrlar yo'nalishlari uchun « **OLIIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA** » fanidan tuzilgan fan dasturi asosida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar : dots. Raxmatov R.R. ,
dots. Adirov T.X.,
dots. Islamova O.A.,
k.o'q. Tadjibaeva Sh.E.

Taqrizchilar:

Kurganov K. A. – O'zbekiston Milliy Universiteti “Algebra va funksional analiz” kafedrasida dotsenti, f.-m.f.n..

Abduvaitov X.A.– TATU “Algoritmash va matematik modelashtirish” kafedrasida dotsenti, f.-m.f.n..

« **OLIIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA** » fanidan tuzilgan ushbu ishchi dastur kafedra yig'ilishida muhokama qilindi va tasdiqlandi (____ ____ 201__ yil, bayonnoma № ____).

Kafedra mudiri _____ R. Raxmatov

Ishchi dastur DIF ilmiy-uslubiy kengashi tomonidan ko'rib chiqildi va tasdiqlandi.
(____ ____ 201__ yil, bayonnoma № ____)

Kengash raisi: Fakultet dekani _____ D.G. Abdullaev

Ishchi dastur Toshkent Axborot Texnologiyalari Universiteti Ilmiy-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqildi va tasdiqlandi. (201__ yil “__” ____dagi “__” – sonli bayonnoma).

O‘quv uslubiy boshqarma boshlig‘i _____ A.Ergashev

Kirish

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fani talabalarga o‘zlashtirishlari zarur bo‘lgan tabiiy-ilmiy, umumkasbiy, harbiy, texnik va matematikaning maxsus bo‘limlarini o‘rgatish va harbiy masalalarga (tayin masalani matematik tilda ifodalash, yechimning optimal usulini tanlash, olingan natijalarni baholash) matematikani qo‘llashda dastlabki ko‘nikmalarini hosil qilish maqsadida o‘qitiladi.

Fanning maqsad va vazifalari

Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursini o‘rgatishdan maqsad – talabalar iqtidorini o‘stirish, mantiqiy va algoritmik fikrlash qobiliyatini shakllantirish; axborotlar bilan bog‘lik jarayonlarni tahlil qilish va matematik modellashtirish uchun zarur bo‘lgan matematik usullarni o‘qitish; axborotlar va texnologiyalarsohasidagi turli yo‘nalishdagi masalalarning asosli va optimal (eng maqbul) yechimlarini topishda matematika fanining o‘rni va ahamiyatini ko‘rsatish.

O‘tilgan mavzularni mustaqil rivojlashtirish, to‘g‘ri yechimlarini topish, turli axborot manbalaridan (adabiyot va internet) foydalanish ko‘nikma va qobiliyatlarini shakllantirish kerak.

Fan bo‘yicha talabaning malakasiga qo‘yiladigan talablar

Fanni o‘rganish natijasida talabalar quyidagi tasavvurlarga ega bo‘lishlari kerak:

- Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining dunyoni bilishdagi, undagi tushuncha va tasavvurlarini umumiyligini tasavur etishdagi alohida xususiyati xaqida;

-matematik modellashtirish xaqida;

-olingan natijalarni qo‘llash mumkin bo‘lgan hollarni baholash va modellarni tekshirish usullari haqida;

Quydagilardan foydalana olishi va bilish kerak:

-matematik tahlilning asosiy tushunchalari va usullarini, analitik geometriyani, chiziqli algebrani va operatsion hisoblashni;

Quyidagi tajribalarga ega bo'lishi kerak:

-inshoatlarni (obektlarni)soni va sifat munosabatlarini ifodalash uchun matematika belgilarini ishlata olish;

- matritsalar ustida amallarni hisoblay olishi, determinantning qiymatini uning ta'rif va xossalriga ko'ra (jumladan Laplas teoremasidan foydalanib) hisoblashlari, matritsa rangi va teskari matritsalarini turli usullar bilan topa olishi;

- chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tadqiq etishi va ularni turli usullar bilan yechimlarini topishi;

- chiziqli va Yevklid fazolarning ta'rifini aniq bilishi, vektorlarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligini, vektorlar sistemasining rangini, fazoning bazisi va o'lchovini, fazo ostilarni bilishi;

- chiziqli va Yevklid fazolarda chiziqli operatorlarning boshlag'ich nazariyasini aniq bilishi;

- to'g'ri chiziq va tekislikning turli tenglamalarini bilishi, ular orasidagi burchaklarni hisoblay olishi, ularning parallelizm va perpendikulyarlik shartlarini bilishi, nuqtadan to'g'ri chiziq va tekislikkacha masofani hisoblay olishi;

- ikkinchi tartibli egri chiziqlarni, ularning tenglamalari bo'yicha tahlil etishi va tasniflashi;

- differensiallash va integrallash formulalarini chalkashtirmasdan to'g'ri ishlata bilishi;

- elementar hisoblashda yaxshi tajribaga ega bo'lishni, qiyinchiliksiz berilgan funksiya uchun Teylor formulasini yozishi;

- integrallarni hisoblashda, qatorni yaqinlashishga tekshirishda zarur usullarni osonlikcha topa bilishi;

- differensial va integral hisobning tatbiqlarini bilishi;

- eng sodda differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini yecha bilish;

- operatsion hisobni bilishi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

O'quv jarayoni bilan bog'liq ta'lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada dars berish, muammoli ma'ruzalar o'qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg'or pedagogik texnologiyalardan va mul'timedia vositalaridan foydalanish, tinglovchilarni undaydigan, o'ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo'yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. Bu ta'lim o'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlanishlarini ko'zda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma'lum bir ta'lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondoshuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam etmog'i lozim: jarayonning mantiqiyliqi, uning barcha bo'g'inlarini o'zaro bog'langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatni aktivlashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o'quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o'z-o'zini faollashtirishi va o'z-o'zini ko'rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta'lim beruvchi va ta'lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e'tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta'lim. Ta'lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta'lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni ob'ektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini,

dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo'llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta'minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo'llash - yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o'quv jarayoniga qo'llash.

O'qitishning usullari va texnikasi. Ma'ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta'lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O'qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o'zaro o'rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O'qitish vositalari: o'qitishning an'anaviy shakllari (darslik, ma'ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o'zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blis-so'rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Semestr davomida test topshiriqlari hamda tayanch so'z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o'tkaziladi.

“ Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika ” fanidan mashg‘ulotlarning mavzular va soatlar bo‘yicha taqsimlanishi:

t/r	Mavzular nomi	Jami soat	Ma’ruza	Amaliy mashg‘ulot	Mustaqil ta’lim
1	Matritsa va determinantlar	20	6	6	8
2	Chiziqli tenglamalar sistemasi	14	4	4	6
3	Vektorlar va ular ustida amallar	20	4	6	10
4	Analitik geometriya elementlari	24	6	4	14
5	Kompleks sonlar	12	4	4	4
6	Bir o‘zgaruvchili funksiyalar. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar.	106	36	34	36
7	Differensial tenglamalar	36	12	10	14
8	Operatsion hisob	20	6	4	10
9	Qatorlar	46	20	12	14
10	Karrali va egri chiziqli integrallar	28	10	6	12
11	Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika	84	36	18	30
	jami	410	144	108	158

Asosiy qism: Fanning uslubiy jixatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo‘yicha talabalarga DTS asosida yetkazilishi zarur bo‘lgan bilim va ko‘nikmalar to‘la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo‘yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatlarimizda bo‘layogan ijtimoiy – siyosiy va demokratik o‘zgarishlar, iqtisodiyotini erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalaridagi islohatlarning ustuvor masalalarni qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so‘nggi yutuqlari e’tiborga olinishi tavsiya etiladi.

Ma’ruza mashg‘ulotlari

Matritsa va determinantlar. Determinantlar va ularning xossalari. Matritsalar va ular ustidagi amallar. Teskari matritsa. Matritsa rangi va uni topish.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritim, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Chiziqli tenglamalar sistemasi: Chiziqli algebraik tenglamalar tizimi. Kramer, Gauss va matritsa usullari yordamida chiziqli algebraik tenglamalar tizimini yechish. Bir jinsli chiziqli tenglamalar tizimlari va ularning fundamental yechimlarini topish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Vektorlar va ular ustida amallar: R^n arifmetik fazo. Vektor va ular ustidagi chiziqli amallar. Vektorni bazislarga yoyish. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari. Ularning xossalari. Vektorlarning kollinearlik, perpendikulyarlik va komplanarlik shartlari. Vektorlarning fizik, mexanik va ba'zi bir harbiy amaliy masalalarga tadbiiq qilinishi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Analitik geometriya elementlari: Qutb koordinata sistemasi va uning dekart koordinata sistemasi bilan bog'lanishi. Uning harbiy topografiyada foydalanishi. Tekislikda to'g'ri chiziqlarning har xil ko'rinishlardagi tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. Ularning paralellik va perpendikulyarlik shartlari. Tekislik. Tekisliklar orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri chiziqlarning har xil ko'rinishlardagi tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Ularning paralellik va perpendikulyarlik shartlari. Aylana, Ellips, giperbola va parabola tenglamalari va ularning xossalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Kompleks sonlar: Kompleks sonlar. Uning algebraik, trigonometrik va ko'rsatkichli ko'rinishlari. Eyler formulasi. Kompleks sonlar ustidagi amallar. Muavr formulasi. Ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q10, Q11, Q12, Q14.

Bir o'zgaruvchili funksiyalar. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar: Ketma-ketliklar limiti va ularning xossalari. Funksiya limiti. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar va ularning xossalari. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar. Funksiyaning uzluksizligi. shartlari. Hosilaning mexanik va geometrik ma'nosi. Yig'indi, ko'paytma, bo'linma, murakab, teskari va ko'rsatkichli funksiya hosilalarini topish. Oshkormas funksiya hosilasi. Logarifmik differensiallash. Parametrik ko'rinishdagi funksiya va uning hosilasi. Funksiya differensial va uning geometrik ma'nosi. Murakkab funksiya differensial. Yuqori tartibli funksiya differensial va hosilasi. Differensial hisobning asosiy teoremlari: Ferma, Roll. Lagranj va Koshi teoremlari. Lopital qoidasi. Funksiya monotonligi, ekstremum qiymatlari va uning grafigining qavariq, botiq intervallari. Burilish nuqtasi. Asimptotalari. Funksiyani to'liq tekshirish. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. O'zgaruvchini almashtirib va bo'laklab integrallash. Kasr-ratsional va ba'zi bir irratsional ifodalarni integrallash. Trigonometrik ifodalarni integrallash. Aniq integral. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral. Nyuton-Leybnis formulasi. O'zgaruvchini almashtirib va bo'laklab integrallash. Anik integralning geometrik va mexanik masalalarni yechishga tatbiki. 1 va 2-tur xosmas integrallar. Ko'p argumentli funksiyalar limitlarini hisoblash. Xususiy hosila va to'la differensiallarni topish. Yuqori

tartibli xususiy hosila va differensiallar. Murakkab va oshkormas funksiyalarni differensiallash. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q10, Q11, Q12, Q14.

Differensial tenglamalar: Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. O'zgaruvchilari ajraladigan 1 – tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamalar turlari va yechish usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibli pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chizikli differensial tenglamalar. Umumiy yechim haqida teorema. Ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli. O'ng tomoni maxsus ko'rinishda bo'lgan o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q4, Q7, Q10, Q11, Q14.

Operatsion hisob: Laplas almashtirishlari. Asl va tasvir. Tasvirlarning xossalari, tasvirlar jadvali. Operatsion hisobning asosiy teoremlari. Tasvirga ko'ra aslni topish usullari. Originallar o'ramasi va uning xossalari. Dyumel integrali. Differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish usullari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q14.

Qatorlar: Sonli qatorlar. Qator yaqinlashishi va yig'indisi. Qatorlar ustida amallar. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari. Ishorali almashinuvchi qatorlar, Leybnis alomati. Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish. Funksional qatorlar. Yaqinlashish va tekis yaqinlashish. Veyrshtas alomati. Tekis yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Darajali qatorlarning xossalari. Teylor qatori. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Fure qatorlari, trigonometrik funksiyalar sistemasi. Yaqinlashuvchi va tekis yaqinlashuvchi funksiyalarini Fure qatoriga yoyish. Furening kosinus va sinus almashtirishlari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q4, Q7, Q10, Q11, Q14.

Karrali va egri chiziqli integrallar: Ikki va uch karrali integrallar ta'rifi. Mavjudlik va o'rta qiymathaqidagi teoremlar. Karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish. Qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemalariga o'tish usuli. Dekart koordinat sistemasida karrali integrallarni hisoblash. 1 va 2 tur egri chiziqli integrallar va ularning asosiy xossalari va ularni hisoblash usullari. Grin formulasi. Egri chiziqli integrallarning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmashlik sharti.

Tasodif va qonuniyat. Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimol. Ehtimolning statistik ta'rifi. Ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosida qurish.

Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. To'la ehtimol va Bayes formulalari.

T/r	Ma'ruza mavzulari	soat
1.	2 va 3 chi tartibli determinantlar Determinantlar hisoblash usullari.	2
2.	Matritsalar. Asosiy ta'riflar. Matritsalar ustida amallar. Teskari matritsa.	2
3.	Matritsaning rangi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini. Kroneker-Kapelli teoremasi.	2
4.	Chizikli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Kramer, matritsa va Gauss usullari.	2
5.	Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish, yechimlar to'plamini o'lchash. Fundamental yechimlar sistemasini.	2
6.	Vektorlar. Vektorlar ustidan chiziqli amallar. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar. Bazis.	2
7.	Ikki vektorning skalyar va vektor ko'paytmasi. Uch vektorning aralash ko'paytmasi	2
8.	Tekislikda to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarningn paralellik va perpendikulyarlik shartlari.	2
9.	Fazoda tekislik tenglamalari. Ular orasidagi burchak. Tekisliklarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari.	2
10.	R^3 da to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashishi.	2
11.	Haqiqiy sonlar to'plami. Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida amallar.	2
12.	Muavr, Eyler formulalari.	2
13.	Funksiya va uning berilish usullari. Sonlar ketma ketligi. Uning limiti va xossalari.	2
14.	Funksiyaning limiti va uning xossalari. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar.	2
15.	Birinchi va ikkinchi ajoyib limit.Funksiyaning uzliksizligi. Uzilish nuqtalari va uning turlari.	2
16.	Funksiya hosilasi. Hosilining geometrik va mexanik ma'nosi. Hosilaning xossalari.	2
17.	Hosilalar jadvali. Oshkor, oshkormas va parametrik ko'rinish- dagi funksiyalarni differensialash. Murakkab va teskari funksiyaning hosilasi.	2

18.	Funksiyaning differensial va uning geometrik ma'nosi. Yuqori tartibli hosila va differensial.	2
19.	Funksiyaning hosila yordamida tekshirish.	2
20.	Roll, Lagranj va Koshi teoremlari. Lopital qoidasi	2
21.	Boshlang'ich funksiya va aniqlanadigan integral. Aniqlanadigan integralning xossalari.	2
22.	Integrallash jadvali. Aniqlanadigan integralda o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash.	2
23.	Kasr ratsional ko'rinishdagi funksiyalarni integrallash.	2
24.	Trigonometrik va ba'zi bir irratsional funksiyalarni integrallash.	2
25.	Aniqlanadigan integral. Aniqlanadigan integralni hisoblash va uning xossalari.	2
26.	Aniqlanadigan integralning geometrik va mexanik ma'nosi. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral. Nyuton-Leybnis formulasi.	2
27.	1 va 2- tur xosmas integrallar, ularni hisoblash va yaqinlashishga tekshirish.	2
	JAMI	54

Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang'ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish. Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To'g'ri to'rtburchakda tekis taqsimlangan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Katta sonlar qonuni. Chebyshev tengsizligi. Chebyshev va Bernulli teoremlari. Lyapunovning markaziy limit teoremasi.

Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma usul. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va distogramma. Taqsimot parametrlarning statistik baholari. Siljimagan, effektiv va asosli baholar. Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlari va eng katta o'xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko'rsatkichli va normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.

Bahoning aniqligi, ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq, oraliq taqsimotning matematik kutulmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchlilik oraliqlar.

Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish sohasi. Kritik nuqtalar. Statistik taxlinlarni tekshirishda K. Pirson, Kolmogorov – Smirnovparning tasiqlash alomatlari. Puasson taqsimotining parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi haqidani taxminlarni tekshirish. Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalarni aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini aniqlashning yig‘indalar va eng kichik kvadratlar usuli

Qo‘llaniladigan ta‘lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta‘lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

**«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo‘yicha
ma‘ruza mashg‘ulotlarining kalendar tematik rejasi**

I semestr

II semestr

T/r	Ma‘ruza mavzulari	soat
1.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya. Asosiy ta‘rif va tushunchalari. Aniqlanish sohasi. Limiti, uzluksizligi.	2
2.	Birinchi tartibli xususiy hosilalari. Xususiy differensial. To‘la differensial Yuqori tartibli xususiy hosila va diffe-l. Aralash hosilaning tengligi haqidagi teorema.	2
3.	Murakkab va oshkormas funksiyaning diffe-rensiallashtirish. To‘la hosila. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumi.	2
4.	Differensial tenglama. Asosiy tushuncha va ta‘riflar. Birinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.	2
5.	Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.	2
6.	Tartibini pasaytirish mumkin bo‘lgan yuqori tartibli differensial tenglamalar. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini strukturasi haqidagi teorema. Voronskiy determinanti.	2
7.	O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglama.	2
8.	O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar.	2

	O'zgarasni variatsiyalash usuli.	
9.	O'ng tomoni maxsus ko'rinishda bo'lgan o'zgar- mas koeffitsientli bir jinslimas chiziqli differensial tenglamalarning xususiy yechimini topish. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi.	2
10.	Laplas almashtirishlari va xossalari. Operatsion hisobning asosiy teoremlari.	2
11.	Asil tasvirini integrallash va differen- siallash haqidagi teoremlar.	2
12.	O'zgaras koeffitsientli diffirensial tenglama va tenglamalar sistemasini yechishining operatsion usuli.	2
13.	Sonli qatorlar, qatorning yaqinlashishi va uzoqlashishi. Geometrik qator. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti. Garmonik qator.	2
14.	Qator yaqinlashishining yetarli alomatlari. Taqqoslash alomati. Dalamber alomati. Koshining radikal alomati. Koshining integral alomati.	2
15.	Ishoralari almashinuvchi qatorlar. Leybnis alomati. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar. Absalyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari.	2
16.	Funksional qatorlar. Yaqinlashish sohasi. Tekis yaqinlashish tushunchasi. Veyershtas alomati, tekis yaqinlashuvchi qatorning xossalari.	2
17.	Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi va intervali. Absolyut yaqinlashuvchi darajali qatorlarning xossalari.	2
18.	Teylor va Makloren qatorlari. Ularning qo'llanishi.	2
19.	Funksiyalarning ortogonal va ortonormal sistemalari. Funksiyani ortonormal sistemalar buyicha Fure qatoriga yoyish. Dirixle sharti.	2
20.	Davriy funksiya uchun Fure qatori. Juft va toq funksiyalar uchun Fure qatori. Yarim davrda berilgan ixtiyoriy davriy funksiyalarning Fure qatori.	2
21.	Fure qatorining kompleks shakli. Parseval tengligi. Fure integrali. Toq va juft funksiyalar uchun Fure integrali. Furening kosinus va sinus almashtirishlari	2
22.	Ikki karrali integral tushinchasiga olib keladigan masalalar. Ta'rifi va xossalari. Ikki karrali integralning mavjudligi haqidagi teorema.	2
23.	Dekart koordinatalar sistemasida ikki karrali integralni hisoblash. Ikki karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish. Qutb koordinata sistemasida ikki karrali integral.	2
24.	Uch karrali integral ta'rifi, mavjudlik teoremasi. Uch karrali integralning xossalari.	2

25.	Dekart koordinat sistemasida uch karali Integral. Uch karrali integrallarda o'zgaruvchini almashtirish. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida uch karrali integral.	2
26.	1- tur egri chiziqli integral va ularni hisob-lash. Xossalari.	2
27.	2- tur egri chiziqli integral va ularni hisob-lash. Xossalari Grin formulasi. 2 tur egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti.	2
JAMI		54

IV semestr

№	Ma'ruza mavzulari	Ajr. soat
1	Tasodif va qonuniyat. Tasodifiy hodisa va ular ustida amallar. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar algebrasi.	2
2	Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimol. Ehtimolning statistik ta'rifi. Ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosida qurish.	2
3	Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. To'la ehtimol va Bayes formulalari.	2
4	Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.	2
5	Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari.	4
6	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang'ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.	2
7	Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.	2
8	Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To'g'ri to'rtburchakda tekis taqsimlangan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.	2

	Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti.	
9	Katta sonlar qonuni. Chebyshev tengsizligi. Chebyshev va Bernulli teoremlari. Lyapunovning markaziy limit teoremasi.	2
10	Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma usul. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va distogramma. Taqsimot parametrlarning statistik baholari. Siljimagan, effektiv va asosli baholar.	4
11	Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlari va eng katta o'xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko'rsatkichli va normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.	2
12	Bahoning aniqligi, ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq, oraliq taksimotning matematik kutulmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchlilik oraliqlar.	2
13	Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish sohasi. Kritik nuqtalar.	2
14	Statistik taxlinlarni tekshirishda K. Pirson, Kolmogorov – Smirnovparning tasiqlash alomatlari. Puasson taqsimotining parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi haqidani taxminlarni tekshirish.	2
15	Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalarni aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini aniqlashning yig'indalar va eng kichik kvadratlar usuli.	4
	Jami	36

Amaliy mashg'ulotlarning tavsiya etiladigan mavzulari

Matritsa va determinantlar. 2-chi, 3-chi, n -chi tartibli determinantlar. Ularni hisoblash usullari. Matritsalar, ular ustida amallar. Teskari matritsa. Matritsa rangi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Chiziqli tenglamalar sistemasini: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Kramer, matritsa va Gauss usullari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Vektorlar va ular ustida amallar: Vektorlar, ular ustida amallar. Vektorlarning skalyar, vektor, aralash ko'paytmalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Analitik geometriya elementlari: Dekart va qutb koordinatalar. Ular orasidagi bog'lanish. Tekislikda to'g'ri chiziqlar. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklar. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro joylashuvi. Tekisliklar, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak va masofalar. R^2 dagi egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13

Kompleks sonlar: Kompleks sonlar, ular ustida amallar. Muavr, Eyler formulalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A3, Q10, Q11, Q12, Q14.

Bir o'zgaruvchili funksiyalar. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar: Asosiy elementar funksiyalar. Sonli ketma – ketliklar limitlarini hisoblash. Funksiya limitini hisoblash. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish. Funksiyaning uzlish nuqtalari va ularning turlarini aniqlash. Funksiya hosilasi. Murakkab, oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarning hosilasi. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Funksiyalarni hosila yordamida tekshirish. Lopital qoidasi. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Integralda o'zgaruvchilarni almashtirish. Bo'laklab integrallash. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik va irratsional ifodalarni integrallash. Aniq integrallarni hisoblash, Nyuton – Leybnis formulasi. Aniq integralni hisoblashda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash. Aniq integralning geometrik va mexanik masalalarni yechishga tatbiqi. 1 va 2-tur xosmas integrallar. Ko'p argumentli funksiyalar limitlarini hisoblash. Xususiy hosila va to'la differensiallarni topish. Yuqori tartibli xususiy hosila va differensiallar.

Murakkab va oshkormas funksiyalarni differensiallash. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Differensial tenglamalar: O'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamalarining asosiy turlari va ularni yechish usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar. Umumiy yechim. O'zgaruvchilari ko'effitsientli 2- tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi va ularni yechish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q7, Q10, Q12, Q14.

Operatsion hisob: Tasvir va asl, ularni aniqlash. Asllar o'ramasi. Operatsion hisob yordamida differensial tenglamalarni yechish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, Q10, Q14

Qatorlar: Sonli qatorlar. Musbat hadli qatorlar. Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish. Ishorasi almashinuvchi qatorlar. Funksional qatorlar. Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi. Teylor qatori. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Funksiyalarni trigonometrik qatorlarga yoyish. Furening sinus va kosinus almashtirishlari. Kompleks ko'rinishdagi Fure qatori.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Karrali va egri chiziqli integrallar: Ikki va uch karrali integrallar va ularni hisoblash. O'zgaruvchilarni almashtirish. Karrali integrallarni qutb, silindrik va sferik koordinata sistemalarida hisoblash.

1- va 2- tur egri chiziqli integrallarni hisoblash. Egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmashlik sharti. Grin formulasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, . Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar

Ehtimolning klassik ta'rifiga doir masalalar yechish. Geometrik ehtimol. Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. To'la ehtimol va Bayes formulalari. Bernulli formulasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

Tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot qonunlari.

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini hisoblash. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

Tanlanma usul.

Emperik taqsimot funksiyasi va uni grafigini yasash. Poligon va gistrogramma. Taqsimot parametrlarni statistik baholarini hisoblash. Statistik taxminlarni tekshirish. Korrelyatsion va regrission taxlil

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

**«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha
amaliy mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi**

I semestr

T/r	Amaliy mashg'ulotlar mavzulari	soat
1.	Determinantlar va ularning xossalari. Determinantlarni hisoblash.	2
2.	Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsani hisoblash.	2
3.	Chizikli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish.	2
4.	Matritsaning rangi topishga va Gauss usuliga doir misollar yechish.	2
5.	Chizikli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish.	2
6.	Vektorlar va usullar ustida amallar Ikki vektorning skalyar kupaytmasi xossalari va hisoblash.	2
7.	Ikki vektorning vektor ko'paytmasi va uch vektorlarning aralash ko'paytmasi.	2
8.	Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalariga doir misollar yechish.	2
9.	Fazoda tekislik tenglamalariga doir misollar yechish.	2
10.	Fazoda to'g'ri chiziq. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziqning o'zaro joylashuviga doir misollar yechish.	2
11.	Kompleks sonlar va ular ustida amallar.	2
12.	Muavr va Eyler formulalariga doir misollar yechish.	2
13.	Asosiy elementar funksiyalar va ularning grafiklarini yasash.	2
14.	Limitni hisoblash. $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochish.	2
15.	1 va 2- ajoyib limitlarga doir misollar yechish. Funksiyaning uzluksizligi.	2
16.	Funksiyaning hosilasini topishga doir misollar yechish. Logarifmlarni differensiallash.	2
17.	Murakkab funksiyalarning hosilasiga Oshkormas va parametrik funksiyaning hosilasi.	2

18.	Yuqori tartibli hosila va differensial. Lopital qoidasi.	2
19.	Funksiyaning monotonligi, ekstremumni topish. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymati.	2
20.	Asimptotalar, funksiya grafigining botiqligi, qavariqligi. Burilish nuqtasi. Funksiyani to'la tekshirish, grafigi.	2
21.	Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash.	2
22.	Kasr ratsional funksiyaning integrallash.	2
23.	Trigonometrik funksiyalarni integrallash.	2
24.	Irratsional ifodalarni integrallash.	2
25.	Aniq integralni hisoblash. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.	2
26.	Aniq integral yordamida yassi figuralaryuzlarini hisoblash. Aniq integral yordamida jismlar hajmini va egri chiziq yoy uzunligini hisoblash	2
27.	Birinchi va ikkinchi tur xosmas integrallarga doir misollar yechish.	2
Jami		54

II semestr

T/r	Amaliy mashg'ulotlar mavzulari	soat
1	Ikki argumentli funksiya aniqlanish sohasi va grafigiga doir misollar. Limiti, uzluksizligi. Birinchi tartibli xususiy hosilalar.	2
2	Ikki argumentli funksiya ekstremum-larini topishga doir misollar. Shartli ekstremumlarni topish. Ikki argumentli funksiyaning to'la differensial va uning takribiy hisoblashlarga tatbiqi.	2
3	Birinchi tartibli differensial tenglamalar. O'zgaruvchisi ajraladigan va bir jinsli differensial tenglamaga doir misollar yechish.	2
4	Chizikli differensial tenglama. Bernulli tenglamasiga doir misollar yechish.	2
5	Yuqori tartibli differensial tenglama. Tartibini pasaytirish yordamida yechiladigan differensial tenglamalar.	2
6	Yuqori tartibli o'zgaruvchisiz chizikli bir jinsli tenglamalarga doir misollar yechish.	2

7	O'ng tomoni maxsus kurinishdagi bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarni yechishga doir misollar yechish.	2
8	Operatsion hisob. Tasvirdan aslga-asldan tasvirga o'tishga doir misollar yechish.	2
9	Operatsion hisob yordamida o'zgarmas koeffitsientli chizikli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob usuli bilan yechish..	2
10	Musbat hadli sonli qatorlar. Taqqoslash alomatiga doir misollar yechish. Dalamber va Koshining radikal alomatlariga doir misollar yechish.	2
11	Koshining integral alomatlariga doir misollar yechish. Ishorasi almashuvchi sonli katorlar. Absolyut va shartli yaqinlashishni aniqlashga doir misollar yechish.	2
12	Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi va sohasini topishga doir misollar yechish.	2
13	Taylor va Makloren qatorlarining tadbiqiga doir misollar yechish.	2
14	Davriy funksiyalarni Fure qatoriga yoyish. Juft va toq funksiyalarni Fure qatoriga yoyishga doir misollar yechish.	2
15	Ixtiyoriy davrli funksiyalarni Fure qatoriga yoyishga doir misollar yechish. Furening sinus va kosinus almashtirishlari.	2
16	Ikki karrali integrallarni Dekart va qutb koordinatlara sistemasida yechish. Ikki karrali integral yordamida yuza va hajmni hisoblashga doir misollar yechish.	2
17	Uch karrali integralni hisoblashga doir misollar yechish. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida 3 karrali integral. 3 karrali integralni geometrik masalalariga tatbiqi.	2
18	1 va 2 - tur egri chiziqli integralni hisoblashga doir misollar yechish. Grin formulasi. 2-tur egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligiga doir misollar yechish.	2
Jami		36

IV semestr

№	Amaliy darslar mavzusi	Ajr. soat
---	------------------------	-----------

1	Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar. Ehtimolning klassik ta'rifiga doir masalalar yechish.	1
2	Geometrik ehtimol. Ehtimolning xossalariidan foydalanib murakkab hodisalalarining ehtimolini hisoblash.	1
3	Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. To'la ehtimol va Bayes formulalari.	1
4	Bog'liqsiz tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplas, Puasson formulalari.	1
5	Tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot qonunlari. Taqsimot funksiya, zichlik funksiya va uning xossalari.	2
6	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini hisoblash. Matematik kutilish, dispersiya va boshqa boshlang'ich va markaziy momentlar.	2
7	Binomial, Puasson, gipergeometrik, tekis, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan miqdorlarga doir masalalar.	1
8	Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari.	1
9	Talanma usul. Emperik taqsimot funksiyasi va uni grafigini yasash. Poligon va gistrogramma.	2
10	Taqsimot parametrlarni statistik baholarini hisoblash.	1
11	Ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq. Matematik kutilish, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchli oraliqlar tuzish.	1
12	Statistik taxminlarni tekshirish. Puasson taqsimoti parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi haqidagi taxminni tekshirish	2
13	Korrelyatsion va regrission taxlil. Chiziqli korrelyatsiya koeffitsientlarini aniqlash. Eng kichik kvadratlar usuli yordamida chiziqli regressiya tenglamalarini tuzish.	2
	Jami	18

Mustaqil ta'lim tashkil etishning shakli va mazmuni.

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” bo'yicha talabaning mustaqil ta'limi shu fanni o'rganish jarayonining tarkibiy qismi bo'lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to'la ta'minlangan.

Talabalar auditoriya mashg'ulotlarida professor-o'qituvchilarning ma'ruzasini tinglaydilar, misol va masalalar yechadilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uy vazifa sifatida berilgan misol va masalalarni yechadi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o'rganish maqsadida qo'shimcha adabiyotlarni o'qib referatlar tayyorlaydi hamda mavzu bo'yicha testlar yechadi. Mustaqil ta'lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Uyga vazifalarni bajarish, qo'shimcha darslik va adabiyotlardan yangi bilimlarni mustaqil o'rganish, kerakli ma'lumotlarni izlash va ularni topish yo'llarini aniqlash, internet tarmoqlaridan foydalanib ma'lumotlar to'plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to'garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib ilmiy maqola va ma'ruzalar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta'limsiz o'quv faoliyati samarali bo'lishi mumkin emas.

Uy vazifalarini tekshirish va baholash amaliy mashg'ulot olib boruvchi o'qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o'zlashtirish darajasini tekshirish va baholash esa ma'ruza darslarini olib boruvchi o'qituvchi tomonidan har darsda amalga oshiriladi.

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

I SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va qisqacha mazmuni	Berilgan topshiriqlar	Ajr. soat
1.	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
2.	2 – tartibli egri chiziqlar va sirtlar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	16
3.	Vektorlarni matritsa ko'rinishda ifodalash. Chiziqli almashtirish va bunda vektor xossalari va amallarining saqlanishini tekshirish. Uning geometrik ma'nosini ifodalash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	10
4.	Funksiyalarni tekshirish. Murakkab funksiyalar grafigini chizish usullari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	10
5.	Aniq integrallar yordamida yechiladigan masalalar hakida ma'lumotlar va ularni yechish hamda tahlil	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil	16

	qilish.	topshiriqlarni bajarish	
	JAMI		66

II SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va qisqacha mazmuni	Berilgan topshiriqlar	Ajr. soat
1.	Ikki argumentli funksiya ekstremumini topish. Ekstremum mavjudlik sharti va turlari. Lokal va global ekstremumlar. Ko'p argumentli funksiyalar va ularning hosilalari orqali ifodalangan fizik masalalar sharhi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
2.	Laplas va Fure almashtirishlari, ular orasidagi bog'lanish. Ba'zi haqiqiy (transsendent) sonlarni sonli qatorlar orqali ifodalash va hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
3.	Taylor qatori yordamida taqribiy hisoblashlar. Fure qatorlari va garmonik tahlil.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
4.	2 va 3 karrali integrallar yordamida ba'zi geometrik figuralar yuzalari va hajmlarini hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
5.	Qatorlarning differensial tenglamalarni yechishga tatbiqi. Qatorlar yordamida ba'zi integralarni hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	10
	JAMI		62

IV SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va uning qisqacha mazmuni	Ajr.
---	---	------

		soat
1	Ma'lumotlarni taxlil qilish	7
2	Ma'lumotlar asosida taksimotning noma'lum parametrlarini baxolash	8
3	Statistik gipotezalarni tekshirish	7
4	Regressiya tenglamalarini tuzishning turli usullarini (tortilgan ip, yig'indilar usuli, eng kichik kvadratlar) taqqoslash tahlili.	8
	Jami	30

Dasturning informatsion uslubiy ta'minoti

Mazkur fanni o'qitish jarayonida ta'limning zamonaviy metodlari, pedagogik va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini qo'llash nazarda tutilgan:

- chiziqli algebra nazariyasi asoslari, matritsalar va chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga bag'ishlangan mavzular zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsiya va elektron-didaktik texnologiyalaridan foydalanilgan holda o'tkaziladi;

- chiziqli fazoda chiziqli operatorlar va ular ustida amallar hamda analitik geometriya masalalarini yechishga bag'ishlangan amaliy mashg'ulotlarda aqliy xujum, guruhli fikrlash, "ish o'yini" va boshqa pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi;

- bir va ko'p o'zgaruvchi funksiyalar, ularning differensial va integral hisoblariga bag'ishlangan amaliy mashg'ulotlarida kichik guruhlar musobaqalari, guruhli fikrlash pedagogik texnologiyalarini qo'llash nazarda tutiladi.

“ Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika ” fanidan talabalar bilimni reyting tizimi asosida baholash mezonlari.

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fani bo'yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma'lumotlar fan bo'yicha birinchi mashg'ulotda talabalarga e'lon qilinadi.

Fan bo'yicha talabalarning bilim saviyasi va o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligini ta'minlash uchun quyidagi nazorat turlari o'tkaziladi:

joriy nazorat (JN) – talabani fan mavzulari bo'yicha bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg'ulotlarda og'zaki so'rov, test o'tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollektivum, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o'tkazilishi mumkin;

oraliq nazorat (ON) – semestr davomida o'quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o'z ichiga olgan) bo'limi tugallangandan keyin talabani nazariy bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o'tkaziladi va shakli (yozma, og'zaki, test va hokazo) o'quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;

yakuniy nazorat (YaN) – semestr yakunida muayyan fan bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan yozma ish yoki test shaklida o'tkaziladi.

ON o'tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **ON** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **ON** qayta o'tkaziladi.

Oliy ta'lim muassasasi rahbarining buyrug'i bilan ichki nazorat va monitoring bo'limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida **YaN** ni o'tkazish jarayoni muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **YaN** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **YaN** qayta o'tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, ko'nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha talabalarining semestr davomidagi o'zlashtirish ko'rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi.

Ushbu 100 ball baholash turlari bo'yicha quyidagicha taqsimlanadi:

YaN-30 ball, qolgan 70 ball esa JN-30 ball va ON-40ball qilib taqsimlanadi.

Ball	Baho	Talabalarining bilim darajasi
86-100	A'lo	Xulosa va qaror qabul qilish. Ijodiy fikrlay olish. Mustaqil mushohada yurita olish. Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
71-85	Yaxshi	Mustaqil mushohada qilish. Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
55-70	Qoniqarli	Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
0-54	Qoniqarsiz	Aniq tasavvurga ega bo'lmaslik. Bilmaslik.

Fan bo'yicha saralash bali 55 ballni tashkil etadi. Talabaning saralash balidan past bo'lgan o'zlashtirishi reyting daftarchasida qayd etilmaydi.

Talabalarining o'quv fani bo'yicha mustaqil ishi joriy, oraliq va yakuniy nazoratlar jarayonida tegishli topshiriqlarni bajarishi va unga ajratilgan ballardan kelib chiqqan holda baholanadi.

Fan bo'yicha joriy va oraliq nazoratlarga ajratilgan umumiy ballning 55 foizi saralash ball hisoblanib, ushbu foizdan kam ball to'plagan talaba yakuniy nazoratga kiritilmaydi.

Joriy **JN** va oraliq **ON** turlari bo'yicha 55 bal va undan yuqori balni to'plagan talaba fanni o'zlashtirgan deb hisoblanadi va ushbu fan bo'yicha yakuniy nazoratga kirmasligiga yo'l qo'yiladi.

Talabaning semestr davomida fan bo'yicha to'plagan umumiy bali har bir nazorat turidan belgilangan qoidalarga muvofiq to'plagan ballari yig'indisiga teng.

ON va **YaN** turlari kalendar tematik rejaga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan reyting nazorat jadvallari asosida o'tkaziladi. **YaN** semestrning oxirgi 2 haftasi mobaynida o'tkaziladi.

JN va **ON** nazoratlarda saralash balidan kam ball to'plagan va uzrli sabablarga ko'ra nazoratlarda qatnasha olmagan talabaga qayta topshirish uchun, navbatdagi shu nazorat turigacha, so'nggi joriy va oraliq nazoratlar uchun esa yakuniy nazoratgacha bo'lgan muddat beriladi.

Talabaning semestrda **JN** va **ON** turlari bo'yicha to'plagan ballari ushbu nazorat turlari umumiy balining 55 foizidan kam bo'lsa yoki semestr davomida joriy, oraliq va yakuniy nazorat turlari bo'yicha to'plagan ballari yig'indisi 55 balidan kam bo'lsa, u akademik qarzdor deb hisoblanadi.

Talaba nazorat natijalaridan norozi bo'lsa, fan bo'yicha nazorat turi natijalari e'lon qilingan vaqtdan boshlab bir kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat etishi mumkin. Bunday holda fakultet dekanining taqdimnomasiga ko'ra rektor buyrug'i bilan 3 (uch) a'zodan kam bo'lmagan tarkibda apellyatsiya komissiyasi tashkil etiladi.

Apellyatsiya komissiyasi talabalarning arizalarini ko'rib chiqib, shu kunning o'zida xulosasini bildiradi.

Baholashning o'rnatilgan talablar asosida belgilangan muddatlarda o'tkazilishi hamda rasmiylashtirilishi fakultet dekani, kafedra mudiri, o'quv-uslubiy boshqarma hamda ichki nazorat va monitoring bo'limi tomonidan nazorat qilinadi.

REYTING BALLARINING TAQSIMOTI

(O'zOO'MTV 2010 yil 29 avgustdagi 333-sonli buyrug'i asosida)

Fan uchun ajratilgan umumiy reyting ballari taqsimoti

Nazorat turi	JB-1	OB-1	JB-2	OB-2	YaN	Jami
Fanga ajratilgan soatlarga nisbatan foiz hisobida	15	20	15	20	30	100

Fan uchun mashg'ulot turlariga ajratilgan reyting ballari taqsimoti

Nazorat turi		JB1-JB2	Nazorat turi	OB1,OB2	YaN
1.	Amaliy mashgʻulotlarda bilimini sinash	5 bal	1. Nazariy qismdan ekspress soʻrov	3 bal	Yakuniy yozma ish uchun
2.	Uy vazifasini bajarganligi uchun	5 bal	2. Kollokviumlar oʻtkazish yoʻli bilan baholash	6 bal	
3.	Nazorat ishlari uchun	5 bal	3. Yozma ish yoki test topshiriqlari uchun	6 bal	
			4. Mustaqil ish	5 bal	
Jami		15+15bal	Jami	20+20	30

Yakuniy nazoratda yozma ish va test savollarini baholash mezonlari

Yakuniy nazorat yozma ish yoki test shaklida amalga oshirilganda, sinov ko'p variantli usulda o'tkaziladi. Har bir yozma ish varianti 2 ta nazariy savol va 3 ta amaliy topshiriqdan iborat, test topshiriqlaridagi savollar soni 10 ta va undan ko'p bo'lishi ham mumkin. Nazariy savollar fan bo'yicha tayanch so'z va iboralar asosida tuzilgan bo'lib, fanning barcha mavzularini o'z ichiga qamrab oladi.

Har bir nazariy savolga yozilgan javoblar bo'yicha o'zlashtirish ko'rsatkichi 0-6 ball oralig'ida baholanadi. Amaliy topshiriqlar ham 0-6 ball oralig'ida baholanadi. Test topshiriqlari soniga qarab har bir to'g'ri javob uchun alohida ball beriladi. Bunda talaba maksimal 30 ball to'plashi mumkin.

Yozma ish va test sinovi bo'yicha umumiy o'zlashtirish ko'rsatkichini aniqlash uchun variantda berilgan savollarning har biri uchun yozilgan javoblarga qo'yilgan o'zlashtirish ballari qo'shiladi va yig'indi talabanning yakuniy nazorat bo'yicha o'zlashtirish bali hisoblanadi.

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalari

ro'yxati

8. Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
9. Jo'raev T., Sa'dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.1., Toshkent, "O'qituvchi", 1995.
10. Jo'raev T., Sa'dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.2., Toshkent, "O'zbekiston", 1999.
11. Soatov Yo.U Oliy matematika. T., O'qituvchi, 1995. 1- 5 qismlar.
12. N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010.
13. Latipov X.R., Tadjiev Sh. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, "O'zbekiston". 1995.
14. Gmurman V.Y. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Qo'shimcha adabiyotlar:

16. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz, - Toshkent.: O'qituvchi, 1-qism, 1989.
17. Latipov X.R., Nosirov F.U., Tadjiev Sh.A. Analitik geometriya va chiziqli algebradan masalalar yechish bo'yicha qo'llanma. Toshkent, Fan, 1999.
18. A.Yusupov, X.A.Axmedova, A.Tilavov. «Ko'p argumentli funksiyalarning integrallari. Maydonlar nazariyasi». Toshkent, 2011.
19. Piskunov N.S. Differentsialnoe i integralnoe ischislenie dlya VTUZov. -M.: Nauka, v

- 2x chastyax, 2001.
20. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo'llanma. Toshkent, O'qituvchi, 2001.
 21. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi kursi. T. O'qituvchi, 1980.
 22. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Differentsialnye uravneniya. Kratnye integrali. Radi. Funktsii kompleksnogo peremennogo. - Nauka, 1997.
 23. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Elementi lineynoy algebri i analiticheskoy geometrii. - M.: Nauka, 1988.
 24. Kletenik D.V. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. - M.: Nauka, 1986.
 25. Danko P.S., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Vysshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. V 2 ch. - M.: Visshaya; shkola, 1998. -ch. 1, 2.
 26. Berman G.N. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. -M.: Nauka, 1985.
 27. Minorskiy V.I. Sbornik zadach po visshey matematike. M: Nauka, 1987.
 28. Beklemeshev D.V., Petrovich A.Yu., Chubero I.A. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii i lineynoy algebre. -M.: Nauka, 1987.
 29. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Sbornik zadach po visshey matematike, uchebnoe posobie dlya injenerno texnicheskix spetsialnostey vuzov. - M.: Nauka. 1997.
 30. Kolde U.K. Praktikum po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. -M. "Visshaya shkola", 1991.

Internet saytlari

6. www.Ziyonet.uz
7. www.tuit.uz
8. www.Math.uz
9. www.bilim.uz
10. www.gov.uz

OLIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

fanining

II-SEMESTR UCHUN

Nazariy mashg'ulotlar materiallari

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

Toshkent 2016

1-MA'RUZA KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA. ASOSIY TA'RIF VA TUSHUNCHALARI. ANIQLANISH SOHASI. LIMITI, UZLUKSIZLIGI

REJA

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya haqida tushuncha
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uzluksizligi
3. Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti

Tayanch so'zlar: funksiya, uzluksizlik, limit, nuqta atrofi, sath chiziq, sath sirt, aniqlanish soha, qiymatlar soha.

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya haqida tushuncha

Dastlab biz haqiqiy qiymatli funksiyalar bilan shug'ullanamiz. Ba'zan bunday funksiyalarni skalyar (haqiqiy) funksiyalar ham deymiz. n natural son berilgan bo'lsin. R^n da berilgan f funksiya n ta haqiqiy o'zgaruvchini R ga mos qo'ysin, ya'ni $f: \text{dom}f \subseteq R^n \rightarrow R$. Funksiyaning x argument o'zgaruvchisi qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plamiga f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $\text{dom}f$ orqali belgilanadi.

$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in R^{n+1} : x \in \text{dom}f\} \subseteq R^{n+1}$ to'plamga $f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi. Ma'lumki, $n=1$ da bir o'zgaruvchili, $n=2$ yoki $n=3$ bo'lsa, u holda x o'zgaruvchini mos ravishda (x, y) yoki (x, y, z) kabi yozamiz.

Misol 4.17. i) $z = f(x, y) = 2x - 3y$ funksiya R^2 da aniqlangan bo'lib, uning grafigi $2x - 3y - z = 0$ tekislikni tashkil etadi.¹

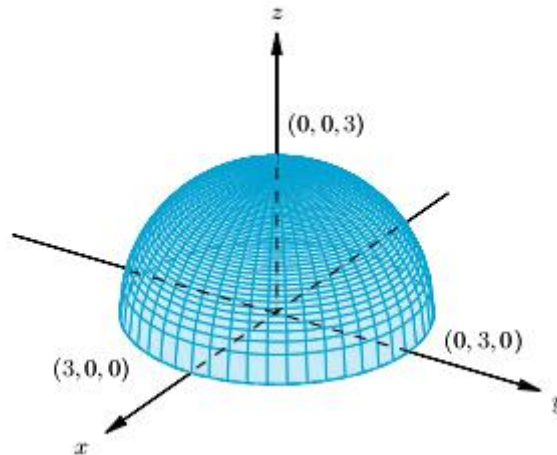
ii) $z = f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2}$ funksiya esa R^2 ning $y = \pm x$ to'g'ri chiziqlarni qanoatlantirmaydigan nuqtalarida aniqlangan.

iii) $\omega = f(x, y, z) = \sqrt{z - y^2 - x^2}$ funksiya $\text{dom}f = \{(x, y, z) \in R^3 : z \geq x^2 + y^2\}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, bu to'plam $z = x^2 + y^2$ elliptik paraboloid va ichki qismidan tashkil topgan.

iv) $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \log(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)$ funksiya esa n o'lchavli $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ sfera ichida aniqlangan bo'lib, bu to'plam qisqacha $\text{dom}f = \left\{x \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\right\}$ deb yoziladi.²

¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Xususan, $n \leq 2$ bo'lganda bu funksiyaning grafigini chiza olamiz. Masalan, $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ deb olsak, uning R^3 dagi grafigi quyidagi 4.8 rasmda berilgan. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ deb olsak, u holda bundan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ va $z \geq 0$ bo'ladi. Bu esa markazi koordinatalar boshida va radiusi 3 bo'lgan yarim sferaning grafigini ifodalaydi.



4.8-chizma. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ funksiya grafigi

Ikki yoki uch o'zgaruvchili funksiyalarga turli xil qiymatlar berish yordamida funksiyaning level to'plamini hosil qilamiz. Berilgan $c \in R$ uchun funksiyaning qiymatini shu o'zgarmas c songa tenglab $L(f, c) = \{x \in \text{dom} f : f(x) = c\} \subset R^n$ to'plamga funksiyaning level to'plami deb ataladi.

Endi bu nazariyani geometrik jihatdan talqin qilaylik. $n = 2$ bo'lganda xy tekislikdagi level to'plam $Z = C$ tekislik va f funksiyaning grafigilari kesishmasidan iborat. Ravshanki, level to'plam bo'sh to'plam bo'lmaydi, faqat va faqat shu holdaki, $c \in \text{im} f$ bo'lsa, bu yerda $\text{im} f$ to'plam f funksiyaning qiymatlar to'plami.

Shunday qilib, $L(f, c)$ to'plam funksiya ikki yoki uch o'lchamli bo'lganda mos ravishda egri chiziq yoki sirtidan tashkil topadi. Masalan, umumiyroq holda, ya'ni $n, m \geq 1$ natural sonlar berilganda Evklid fazosidagi funksiyalarni qaraylik. f orqali R^n ni R^m ga mos qo'yuvchi ixtiyoriy funksiyaning belgilaylik, ya'ni $f : \text{dom} f \subseteq R^n \rightarrow R^m$. Agar $m = 1$ bo'lsa, yuqoridagi skalyar funksiya ega bo'lamiz. Agar $m \geq 2$ bo'lsa, u holda f ni skalyar vektor-qiymatli funksiya deymiz. $m = 2$ (tekislikdagi egri chiziqlar) va $m = 3$ (sirtidagi egri chiziqlar) uchun maxsus vektor qiymatli funksiyalarni ko'raylik, bunda $n = 1$. Agar $n = 2$ va $m = 3$ bo'lsa fazodagi vektor qiymatli funksiyalar sirtlarni ko'ramiz. Agar

² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$n = m$ bo'lsa, u holda f funksiya vektor maydon deyiladi. Masalan, $n = m = 3$ bo'lganda yerning gravitatsion maydoni hosil bo'ladi. $f_i, 1 \leq i \leq m$ bo'lsin. f ning kampanentalarini R^m ning $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ kanonik bazislar bilan bog'laymiz, ya'ni

$$f(x) = (f_i(x))_{1 \leq i \leq m} = \sum_{i=1}^m f_i(x)e_i$$

f funksiya kampanentalari aniqlanish saholarining kesishmalarini $\text{dom}f$ bo'lsin desak, u holda har bir f_i ham $\text{dom}f$ da aniqlangan.

2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uzluksizligi

Oldingi kursda bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun bu tushunchalar ko'rib o'tilganidek, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham xuddi shu belgilashlar kabi bu tushunchalarni kiritamiz. Faqatgina R dagi absolyut qiymat belgisi R^n yoki R^m da norma belgisi bilan almashtiriladi.

Ta'rif 4.19. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ musbat son topilib, barcha $x \in \text{dom}f$ uchun $\|x - x_0\| < \delta$ ($x \in B_\delta(x_0)$) bo'lganda $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ ($f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $x_0 \in \text{dom}f$ nuqtada $f : \text{dom}f \subseteq R^n \rightarrow R^m$ funksiya **uzluksiz** deb ataladi. Agar f funksiya $\Omega \subseteq \text{dom}f$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda f funksiya Ω **to'plamda uzluksiz** deb ataladi.³

Natija 4.20. $f = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$ funksiya $x_0 \in \text{dom}f$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar shu nuqtada barcha f_i kampanentalar uzluksiz bo'lsa.⁴

Misol 4.21. i) $f : R^2 \rightarrow R$ funksiyani $f(x) = 2x_1 + 5x_2$ ko'rinishda aniqlaylik. Bu funksiya $x_0 = (3, 1)$ nuqtada uzluksiz bo'lishini isbotlang.

Yechish: Ma'lumki, $\forall i$ uchun $|y_i| \leq \|y\|$ Eyler tengsizligi o'rinli. Bu tengsizlikdan foydalansak, u holda

$$|f(x) - f(x_0)| = |2(x_1 - 3) + 5(x_2 - 1)| \leq 2|x_1 - 3| + 5|x_2 - 1| \leq 7\|x - x_0\|.$$

³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Berilgan $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ deb tanlasak, u holda f funksiya har bir $x_0 \in R^2$ nuqtada uzluksiz ekani kelib chiqadi.

ii) Yuqoridagi funktsiyani $f: R^n \rightarrow R$ desak, u holda bu akslantirish affin akslantirish bo'ladi, ya'ni $f(x) = ax + b$ ($a \in R^n, b \in R$) deb qaraylik. Affin akslantirish har bir $x_0 \in R^n$ nuqtada uzluksiz, chunki Koshi-Shvars tengsizligiga ko'ra $|f(x) - f(x_0)| = |ax - ax_0| \leq \|a\| \cdot \|x - x_0\|$ bo'ladi. Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda trivial yechim bo'ladi. Agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda $\delta = \frac{\varepsilon}{\|a\|}$ deb olsak, u holda funksiya uzluksiz bo'ladi.

Ta'rif 4.22. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ musbat son topilib, barcha $x', x'' \in \Omega$ uchun $\|x' - x''\| < \delta$ bo'lganda $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f funksiya $\Omega \subseteq \text{dom} f$ to'plamda tekis uzluksiz deb ataladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan, f affin akslantirish R^n da tekis uzluksiz bo'ladi.⁵

Kantor teoremasi. Agar Ω to'plam chegaralangan va yopiq (ya'ni kompakt) da uzluksiz bo'lsa, u holda f funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.⁶

i) Agar φ funksiya $I \subseteq R$ to'plamda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x) = \varphi(x_1)$ funksiya ham $\Omega = I \times R^{m-1} \subseteq R^m$ da aniqlangan va uzluksiz bo'ladi. **Misol uchun:** $f_1(x, y) = e^x$ funksiya $\text{dom} f_1 = R^2$ to'plamda uzluksiz; $f_2(x, y, z) = \sqrt{1 - y^2}$ funksiya esa $\text{dom} f_2 = R \times [-1, 1] \times R$ da uzluksiz bo'ladi.

ii) Agar $\Omega \subseteq R^n$ da f va g funksiyalar uzluksiz bo'lsa, u holda $f \pm g$, $f \cdot g$ funksiyalar ham Ω da uzluksiz bo'ladi; agar $g \neq 0$ bo'lsa, u holda Ω ning biror qism to'plamida f/g ham uzluksiz bo'ladi. Misol uchun: $h_1(x, y) = e^x + \sin y$ funksiya $\text{dom} h_1 = R^2$ da uzluksiz; $h_2(x, y) = y \log x$ funksiya $\text{dom} h_2 = (0, +\infty) \times R$ da uzluksiz; $h_3(x, y, z) = \frac{\arctan y}{x^2 + z^2}$ funksiya $\text{dom} h_3 = R^3 \setminus (\{0\} \times R \times \{0\})$ da uzluksiz bo'ladi.

⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

iii) Agar f funksiya $\Omega \subseteq R^n$ da uzluksiz va $I \subseteq R$ da g uzluksiz bo'lsa, u holda $g \circ f$ akslantirishlar kampazitsiyasi $domg \circ f = \{x \in \Omega : f(x) \in I\}$ da uzluksiz bo'ladi.

Misol uchun: $h_1(x, y) = \log(1 + xy)$ funksiya $domh_1 = \{(x, y) \in R^2 : xy > -1\}$ da uzluksiz;

$h_2(x, y, z) = \left| \frac{x^3 + y^2}{z - 1} \right|$ funksiya $domh_2 = R^2 \times (R \setminus \{1\})$ da uzluksiz;

$h_3(x) = \sqrt[4]{x_1^4 + \dots + x_n^4}$ funksiya $domh_3 = R^3$ da uzluksiz bo'ladi.

Natija 4.23. $f : domf \subseteq R^n \rightarrow R^m$ va $g : domg \subseteq R^m \rightarrow R^p$ funksiyalar hamda $x_0 \in domf$ uchun shunday topilib buning uchun $y_0 = f(x_0) \in domg$ bo'lsin. Bundan tashqari $x_0 \in domh$ uchun $h = g \circ f : domh \subseteq R^n \rightarrow R^p$ kampazitsiyani qaraylik. Agar f funksiya x_0 nuqtada, g esa y_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda h funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.⁷

3. Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti

Ta'rif 4.24. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ musbat son topilib, barcha $x \in domf$ uchun $0 < \|x - x_0\| < \delta$ bo'lganda $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0$ da $l \in R^m$ songa f funksiyaning limiti deb ataladi va $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ kabi belgilanadi.⁸

Agar f funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo'lsa, u holda f funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

i) $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ funksiya $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da aniqlangan va bu to'plamda uzluksiz bo'ladi.

Haqiqatan, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, chunki

$x^4 + y^4 \leq x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$ va limit ta'rifiga ko'ra agar $0 < \|x\| < \sqrt{\varepsilon}$ bo'lsa, u holda $\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2 < \sqrt{\varepsilon}$, bu yerda $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

ii) Keling endi, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = +\infty$ ekanligini ko'rib chiqaylik.

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2 \text{ dan } \|x\| \leq |x| + |y| \text{ ga ko'ra}$$

$$f(x, y) = \frac{|x|+|y|}{\|x\|^2} = \frac{|x|+|y|}{\|x\|} \cdot \frac{1}{\|x\|} \geq \frac{1}{\|x\|} \text{ va agar } \delta = \frac{1}{A} \text{ deb oladigan bo'lsak, u holda}$$

limit ta'rifidan $\|x\| < \frac{1}{A}$ ga ko'ra $f(x, y) > A$ bo'ladi.

Natija 4.28. Faraz qilaylik, shunday $l \in R$ son mavjud bo'lib va g funksiya shunday r o'zgaruvchiga bog'liq bo'lib, (x_0, y_0) nuqtaning atrofida

$$|f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - l| \leq g(r) \text{ va } \lim_{r \rightarrow 0+} g(r) = 0 \text{ bo'lsin. U holda}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l \text{ bo'ladi.}^9$$

Nazorat savollari

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya deganda nimani tushunasiz?
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi deganda nimani tushunasiz?
3. Sath chiziq va sath sirt deganda nimani tushunasiz?
4. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi deb nimaga aytiladi?
5. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi?
6. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligiga doir qanday xossalarni bilasiz?

⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

2- MA'RUZA BIRINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALARI. XUSUSIY DIFFERENSIAL. TO'LA DIFFERENSIAL YUQORI TARTIBLI XUSUSIY HOSILA VA DIFFERENSIAL. ARALASH HOSILANING TENGLIGI HAQIDAGI TEOREMA

Reja:

1. To'la differensial va taqribiy hisoblash formulasi.
2. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.
3. Murakkab va oskormas funksiyalarning hosilalari.

Tayanch ibora va tushunchalar

To'la differensial, differensiallanuvchanlikning zaruriy sharti, differensiallanuvchanlikning yetarli sharti, xususiy differensiallar, taqribiy hisoblash, ikkinchi tartibli xususiy hosila, ikkinchi tartibli to'la differensial, murakkab funksiyaning hosilasi, murakkab funksiyaning xususiy hosilalari, oshkormas funksiyaning hosilasi, oshkormas funksiyaning xususiy hosilalari.

1. To'la differensial

$u = u(x, y)$ funksiya va ixtiyoriy $P(x, y)$ nuqtani qaraymiz. Ma'lumki, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nuqtaga ega bo'lamiz. Bu nuqtalar orasidagi masofa $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ bo'lishi ravshan. $u = u(x, y)$ funksiya $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$ to'liq orttirma oladi.

1-ta'rif. Agar $u = u(x, y)$ funksiyaning $P(x, y)$ nuqtadagi to'liq orttirmasini

$$\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho) \quad (1.1)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, bu funksiya $P(x, y)$ nuqtada **differensiallanuvchi** deyiladi, bu yerda A, B Δx va Δy ga bog'liq bo'lmagan sonlar, oxirgi qo'shiluvchi $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0)$ da yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya.¹⁰

2-ta'rif. Differensiallanuvchi $u = u(x, y)$ funksiyaning argumentlarning $\Delta x, \Delta y$ orttirmalariga nisbatan chiziqli ifodasi bo'lgan bosh bo'lagi funksiyaning **to'la differensial** deyiladi va **du** bilan belgilanadi. $u = u(x, y)$ funksiyaning to'la differensial¹¹

$$du = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y \quad (1.2)$$

formula bilan aniqlanadi.

¹⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

¹¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

Teorema (differensiallanuvchanlikning zaruriy sharti). Agar x funksiya $P(x, y)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u shu nuqtada $u'_x(x, y)$ va $u'_y(x, y)$ hususiy hosilalarga ega bo'ladi, bunda $A = u'_x(x, y)$, $B = u'_y(x, y)$.¹²

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx u(x, y) + u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy.$$

Isboti. $u = u(x, y)$ funksiya $P(x, y)$ nuqtada differensiallanuvchi bolgani uchun $\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$ tenglik o'rinli. Xususan, u $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$ da ham o'rinli. Bu holda Δu to'liq ottirma $\Delta_x u$ xususiy orttirma bo'lib qoladi va $\Delta_x u = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|)$ bo'ladi. Oxirgi tenglikni Δx ga bo'lib $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz va ikkinchi qo'shiluvchi Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya ekanini hisobga olib:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = A$$

ga ega bo'lamiz. Biroq ikkinchi tomondan, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = u'_x(x, y)$, shuning uchun $P(x, y)$ nuqtada $u'_x(x, y) = A$ xususiy hosila mavjud. $P(x, y)$ nuqtada $u'_y(x, y) = B$ xususiy hosila mavjudligi ham shu kabi isbotlanadi.

Yuqoridagi (1) va (2) formulalarda A va B kattaliklarni xususiy hosilaga almashtirib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\Delta u = u'_x(x, y) \cdot \Delta x + u'_y(x, y) \cdot \Delta y + o(\rho) \quad (3)$$

$$du = u'_x(x, y) \cdot \Delta x + u'_y(x, y) \cdot \Delta y \quad (4)$$

Erkli o'zgaruvchilarning orttirmalari ularning differensiallariga bevosita teng, ya'ni $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, shuning uchun to'la differensial

$$du = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy \text{ yoki } du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad (5)$$

formula bilan hisoblanadi. $u'_x(x, y)dx$ va $u'_y(x, y)dy$ qo'shiluvchilar **xususiy differensiallar** deb ataladi, ular mos ravishda $d_x u$ va $d_y u$ bilan belgilanadi. Demak, $du = d_x u + d_y u$.

To'la differensialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya'ni (3), (4) formulalardan $\Delta u = du + o(\rho)$ va cheksiz kichik ρ larda $\Delta u \approx du$ yoki $u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \approx du$ taqribiy tenglik hosil bo'ladi. Demak,

¹² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

(6)

Bu esa **taqribiy hisoblash** formulasidir.

Uch o'zgaruvchili $u = F(x, y, z)$ funksiyaning to'la differensial

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (7)$$

formula bilan hisoblanadi. (6) formulani uch o'zgaruvchili funksiya uchun ham umumlashtirish mumkin.

Teorema (differensiallanuvchanlikning yetarli sharti). Agar $z = f(x, y)$ funksiya $P(x, y)$ nuqtaning biror δ atrofida xususiy hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalar nuqtaning o'zida uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.¹³

1-misol. $u = \ln(x^2 + y^2)$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$u'_x = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad u'_y = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

(1) formulaga asosan, $du = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$ bo'ladi.

2-misol. O'lchovlari $a = 8m$, $b = 6m$, $c = 3m$ bo'lgan parallelepipedning uzunligi va eni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko'paytirilsa, balandligi esa 15 sm kamaysa uning hajmi qanday o'zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmi $v = xyz$; x, y, z uning o'lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban $\Delta V \approx dV$ formuladan hisoblash mumkin.

$$dV = yxdx + xzdy + xydz$$

bo'lib, shartga ko'ra $x=8$, $y=6$, $u=3$, $dx=0.1$, $dy=0.05$, $du=-0.15$ bo'lganligi uchun

$$\Delta V \approx dV = 66 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6(-0.15) = -4.2.$$

Shunday qilib, hajm taxminan $4.2m^3$ ga kamayadi.

3-misol. To'la differensial formulasidan foydalanib:

$$1) \arctg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right), \quad 2) \sqrt{1.04^{1.99}} + \ln 1.02$$

¹³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

larni taqribiy hisoblang.¹⁴

Yechish: To'la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang'ich nuqtani shunday tanlash kerakki funksiyaning va xususiy hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo'lsin. Shundan keyin (6) formuladan foydalanish kerak.

1) $\arccotg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)$ ifoda $u(x, y) = \arccotg\left(\frac{x}{y}-1\right)$ funksiyaning $P_1(1.97; 1.02)$ nuqtadagi qiymati deyish mumkin. Boshlang'ich nuqta uchun $P_0 = (2; 1)$ ni olsak, $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03$, $\Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$ bo'ladi. Endi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$u_x'(x, y) = \left[\arccotg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x \right] = -\frac{y}{y^2 + (x-y)^2};$$

$$u_y'(x, y) = \left[\arccotg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y \right] = \frac{x}{y^2 + (x-y)^2};$$

$$u_x'(2; 1) = -\frac{1}{1 + (2-1)^2} = -0.5; \quad u_y'(2; 1) = \frac{2}{1 + (2-1)^2} = 1.$$

(6) dan foydalansak,

$$\arccotg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right) \approx \arccotg\left(\frac{2}{1}-1\right) + (-0.5)(-0.03) + 1 \cdot 0.02 = \frac{\pi}{4} + 0.015 + 0.02 = 0.82$$

bo'ladi.

$$2) \sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02} \text{ ni } u(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z} \text{ funksiyaning } P_1(1.04; 1.99; 1.02)$$

nuqtadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang'ich nuqta uchun $P_0(1; 2; 1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$$\Delta x = 1.04 - 1 = 0.04, \quad \Delta y = 1.99 - 2 = -0.01, \quad \Delta z = 1.02 - 1 = 0.02.$$

Xususiy hosilalarni topamiz va ularning $P_0(1; 2; 1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$u_x'(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad u_x'(1; 2; 1) = \frac{2 \cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 1;$$

¹⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$u_y'(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_y}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{x^y \cdot \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, u_y'(1; 2; 1) = \frac{1^2 \cdot 0}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 0;$$

$$u_z'(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_z}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, u_z'(1; 2; 1) = \frac{1}{2}.$$

(6) formulaning uch argumentli funktsiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx \sqrt{1^2 + \ln 1} + 1 \cdot 0,04 + 0 \cdot (-0,01) + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 1,05$$

natijani olamiz.

2. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

$u = u(x, y)$ funktsiyaning **ikkinchi tartibli xususiy hosilalari** deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{yx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}''(x, y);$$

$u_{xy}''(x, y)$ va $u_{yx}''(x, y)$ xususiy hosilalar aralash xususiy hosilalar deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgan nuqtalarda ular o'zaro teng bo'ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ yozuv u funktsiyani m marta x o'zgaruvchi bo'yicha va $(n - m)$ marta y o'zgaruvchi bo'yicha differensiallashni bildiradi.¹⁵

1-misol. $u = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_x = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_y = 4x^2 \cdot 3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

¹⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_x = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_y = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = (12x^2y^2 + 7x)'_x = 24xy^2 + 7, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (12x^2y^2 + 7x)'_y = 24x^2y.$$

Birinchi tartibli to'la differensialdan olingan to'la differensial **ikkinchi tartibli to'la differensial** deyiladi. $d(du) = d^2u$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagicha topiladi.¹⁶

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 \quad (1)$$

2-misol. $u = x^2y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensialini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$$u'_x = (x^2y^3)'_x = 2xy^3; \quad u'_y = 3x^2y^2; \quad u''_{xx} = 2y^3, \quad u''_{xy} = 6xy^2, \quad u''_{yx} = 6xy^2, \\ u''_{yy} = 6xy^2,$$

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to'la differensial

$$d^2u = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2y dy^2.$$

3. Murakkab va oshkormas funksiyaning hosilasi

Ikki o'zgaruvchining $Z = Z(x, y)$ differensiallanuvchi funksiyasi berilgan bo'lsin. u va v argumentlar ham x erkli o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsin, ya'ni $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Murakkab funksiyaning hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Ikki o'zgaruvchining differensiallanuvchi $z = z(u, v)$ funksiyasi berilgan bo'lsin. u va v argumentlar ham x va y erkli o'zgaruvchilarning differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsin, ya'ni

¹⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Bu holda berilgan ikki o'zgaruvchili **murakkab funksiyaning xususiy hosilalari** quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Oshkormas $F(x, y(x)) = 0$ **funksiyaning hosilasi**

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

formula orqali hisoblanadi. Bu yerda, $\frac{\partial F}{\partial y} = F'_y \neq 0$,

Uchta o'zgaruvchini bog'laydigan $F(x, y, z) = 0$ tenglamani qaraymiz. Bu yerda $z = z(x, y)$ funksiya bo'ladi. Bunday ko'rinishdagi **oshkormas funksiyaning xususiy hosilalari** quyidagi formulalardan topiladi.¹⁷

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

1-misol. Quyidagi funksiyaning xususiy hosilalarini toping:

$z = u^v$, bu yerda $u = y \sin x$, $v = y \cos x$.

Yechish. Berilgan funksiya ikki o'zgaruvchili murakkab funksiyaadir. Avval z dan u va v o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosila hisoblaymiz

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v \cdot u^{v-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^v \cdot \ln u,$$

so'ngra u va v funksiyalardan x va y o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosila hisoblaymiz

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= y \cos x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin x; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -y \sin x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \cos x. \end{aligned}$$

¹⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

Endi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

formulalardan foydalansak,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v \cdot u^{v-1} \cdot y \cos x + u^v \cdot \ln u \cdot (-y \sin x) = (y \sin x)^{y \cos x} \left[\frac{y \cos^2 x}{\sin x} - y \sin x \ln(y \sin x) \right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v \cdot u^{v-1} \cdot \sin x + u^v \cdot \ln u \cdot \cos x = (y \sin x)^{y \cos x} [\cos x + \cos x \ln(y \sin x)].$$

2-misol. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ oshkormas funksiya uchun $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ lar topilsin.¹⁸

Yechish. Tenglamani chap tomonini $F(x,y,z)$ deb belgilab, xususiy hosilalarini topamiz

$$F'_x(x,y,z) = 2x, \quad F'_y(x,y,z) = -4y - z + 1, \quad F'_z(x,y,z) = 6z - y.$$

Oshkormas funksiyaning xususiy hosilalari formulalaridan foydalanib quyidagi yechimlarga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{2x}{6z-y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{1-4y-z}{6z-y}.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning to'la differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Differensiallanuvchalikning zaruriy sharti qanday?
3. Differensiallanuvchalikning yetarli sharti qanday?
4. Xususiy differensiallar nima?
5. Funksiyaning to'liq orttirmasi va to'la differensiali orasida bog'lanish bormi?
6. To'la differensialdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinmi?
7. Ikkinchi tartibli xususiy hosila qanday topiladi?
8. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensiali nimaga teng?
9. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
10. Oshkormas funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
11. Murakkab va oshkormas funksiylarning xususiy hosilalari qanday topiladi?

¹⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

3-MA'RUZA MURAKKAB VA OSHKORMAS FUNKSIYANI DIFFERENSIALLASH. TO'LA HOSILA. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING EKSTREMUMI

Reja:

1. Ikki o'zgaruvchili funksiya ekstremumi.
2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Tayanch ibora va tushunchalar

Funksiya maksimumi va minimumi, funksiya ekstremumi, ekstremumning zaruriy shartlari, kritik nuqtalar, ekstremumning yetarli shartlari, eng kichik va eng katta qiymatlar.

1. Ikki o'zgaruvchili funksiya ekstremumi.

1-ta'rif. $f = f(x, y)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofining istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya'ni $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada **maksimumga ega** deyiladi.

2-ta'rif. $f = f(x, y)$ funksiyaning $P_1(x_1, y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofining istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo'lsa, ya'ni $f(x_1, y_1) < f(x, y)$ bo'lsa, $f = f(x, y)$ funksiya $P_1(x_1, y_1)$ nuqtada **minimumga ega** deyiladi.¹⁹

Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning **ekstremumi** deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Ekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz $f = f(x, y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} &= f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} &= f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{aligned} \right\}$$

bo'ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.

Bunday nuqtalarga **kritik (statsionar) nuqtalar** deyiladi. Shuni ta'kidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo'lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo'lmisligi ham mumkin.

¹⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

Ekstremumning yetarli shartlari:

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

bilan belgilaymiz va

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lib:

1) $A < 0$ bo'lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga,

2) $A > 0$ bo'lganda minimumga ega bo'ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremum yo'q:

3. $\Delta = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, ekstremum bo'lishi ham, bo'lmashligi ham mumkin.²⁰

1-misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya ekstremumga tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun Oxy tekislikda aniqlangan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; \quad f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

Ekstremumga ega bo'lishning zaruriy shartidan:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = -x^3 + x \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} [x(1-x^2)]^3 + x + x^3 - x = 0, \\ y = -x^3 + x \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Demak, uchta $O(0,0)$, $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ va $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ kritik nuqtalarga ega bo'lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo'q, chunki $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ xususiy hosilalar Oxy tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

²⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4; f''_{xy}(x, y) = 4; f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4.$$

$O(0,0)$ nuqtada ekstremumning yetarli shartini tekshiramiz: $A = -4$, $B = 4$, $C = -4$; $\Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-4) - 4^2 = 0$ bo'lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo'lishini ko'ramiz, masalan, Ox o'qi bo'yicha ($y = 0$)

$$f(x, y)_{y=0} = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0.$$

$y = x$, bissektisa bo'yicha, $f(x, y)|_{y=x} = f(x, x) = 2x^4 > 0$ bo'ladi. Shunday qilib, $O(0,0)$ ning biror atrofida $\Delta f(x, y)$ ortirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak, ekstremum yo'q.

$P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz, bu nuqta uchun $A=20$, $B=4$, $C=20$ bo'lib, $\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ demak $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga ega, $f_{\min} = -8$.

$P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz, bu nuqta uchun $A=20$, $B=4$, $C=20$ bo'lib, $\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ bo'lganligi uchun $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo'ladi, $f_{\min} = -8$.

2-misol. $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini toping.²¹

Yechish. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}.$

$P_0(1;1)$ nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak, $P_0(1;1)$ nuqta kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nuqta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z = \sqrt{(1 + \Delta x - 1)^2 + (1 + \Delta y - 1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuqtaning istalgan atrofida saqlanadi ya'ni $P_0(1;1)$ nuqtada funksiya minimumga ega $z_{\min} = f(1;1) = 0$.

2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Chegaralangan yopiq sohada differensiallanuvchi funksiya o'zining **eng katta va eng kichik qiymatiga** yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida erishadi.

²¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

1-misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.²²

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

bundan $x = -1, y = -1$ bo'lib, $P_0(-1, -1)$ kritik nuqtaga ega bo'lamiz. Funksiyaning soha chegarasida tekshiramiz: AO chegarada $y = 0$ bo'lib, $z = x^2 + x$ funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiyaning ekstremumi:

$$z'_x = 2x + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2} = -0,5$$

bo'ladi.

Demak, $P_1(-0,5, 0)$ AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada $z = y^2 + y$ funksiya hosil bo'lib, $z'_y = 2y + 1 = 0 \quad y = -1/2$.

Demak, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo'ladi. Tenglamasi $y = -3 - x$ bo'lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funksiya hosil bo'lib, $z'_x = 6x + 9 = 0 \quad x = -\frac{3}{2}$. AB ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, demak, AB chegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ bo'ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1, -1) = -1; \quad z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \quad z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$z_4 = f(O) = f(0, 0) = 0; \quad z_5 = f(A) = f(-3, 0) = 6;$$

²² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, II-part, 2010

$$z_6 = f(B) = f(0, -3) = 6.$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab,

$$z_{engkat.} = f(A) = f(B) = 6 \quad va \quad z_{engkich.} = f(P_0) = -1$$

degan xulosaga kelamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning maksimum nuqtasi nima?
2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning minimum nuqtasi nima?
3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi deb nimaga aytiladi?
4. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumga ega bo'lishining zaruriy sharti nima?
5. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumga ega bo'lishining yetarli sharti nima?
6. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?
7. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning biror yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

4-MA'RUZA DIFFERENSIAL TENGLAMA. ASOSIY TUSHUNCHA VA TA'RIFLAR. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI. O'ZGARUVCHILARI AJRALADIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Reja:

1. Differensial tenglamaga olib keladigan masalalar.
2. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.
3. Birinchi tartibli tenglamalar.
4. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Differensial tenglama, oddiy differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama, differensial tenglamaning tartibi, differensial tenglama yechimi, integral chiziq, differensial tenglamani integrallash, birinchi tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, boshlang'ich shart, o'zgaruvchilari ajralgan, o'zgaruvchilari ajraladigan.

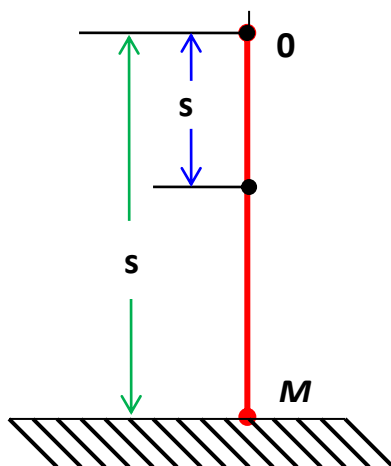
1. Differensial tenglamaga olib keladigan masalalar

Differensial tenglamalar qurilish sohalarida, matematik modellarni tuzishda keng qo'llaniladi.

Tabiatshunoslik, texnika va mexanikaning ko'pgina masalalari qaralayotgan hodisa yoki jarayonni tavsiflaydigan noma'lum funksiyani topishga keltiriladi. Bir necha misol keltiramiz.

1-masala. Massasi m bo'lgan moddiy nuqta og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushmoqda. Havoning qarshiligini hisobga olmasdan, moddiy nuqtaning harakat qonunini toping.²³

Yechish. Moddiy nuqtaning vaziyati $OM=s$ koordinata bilan aniqlanib, u t vaqtga bog'liq ravishda o'zgaradi (1-shakl).



1-chizma

Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra:

²³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$F = ma, \quad (1.1)$$

bu yerda m - moddiy nuqtaning massasi, a - moddiy nuqtaning tezlanishi, F -ta'sir etuvchi kuch. Shartga ko'ra moddiy nuqtaga faqatgina og'irlik kuchi ta'sir etadi, demak, $F = mg$, bu yerda g - og'irlik kuchi tezlanishi, a tezlanish esa yo'ldan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosiladan iborat. Natijada quydagiga ega bo'lamiz:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg \quad \text{yoki} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = g. \quad (1.2)$$

(1.2) tenglik noma'lum funksiya $s = s(t)$ ning ikkinchi tartibli hosilasini o'z ichiga olgan tenglamadan iborat. Uni ikki marta t o'zgaruvchi bo'yicha integrallab izlanayotgan funksiyani topamiz:

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1, \quad (1.3)$$

$$s = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (1.4)$$

(1.4) tenglik biz izlayotgan harakatning umumiy qonunini beradi, undagi ikkita integrallash doimiysi C_1 va C_2 qatnashadi. Bu o'zgarmaslarni nuqtaning boshlang'ich holati va boshlang'ich tezligini bilgan holda aniqlash mumkin.

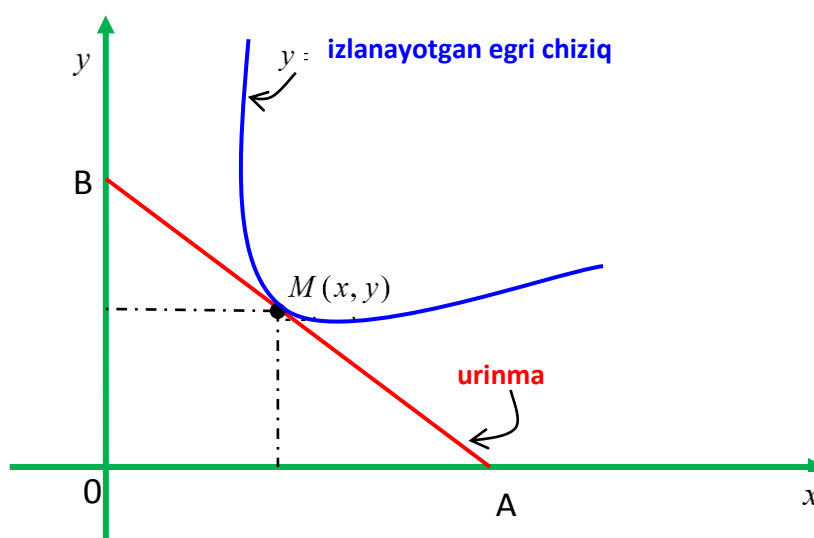
Boshlang'ich $t = 0$ momentda nuqtaning tezligi v_0 ga, uning sanoq boshidan uzoqligi esa s_0 ga teng bo'lsin. $\frac{ds}{dt}$ tezlikni ifodalagani uchun (1.3) dan $C_1 = v_0$ ekanligini, (1.4) dan esa $C_2 = s_0$ ni topamiz. Bularni e'tiborga olsak moddiy nuqta harakat qonuning xususiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0. \quad (1.5)$$

2-masala. Egri chiziqqa uning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmaning ordinatalar o'qidan kesgan kesmasi urinish nuqtasi ordinatasining ikkilanganiga teng. Shu egri chiziq tenglamasini toping.²⁴

Yechish. Izlanayotgan egri chiziqda ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz (2-shakl).

²⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010



2-shakl.

M nuqtada o'tkazilgan urinmaning tenglamasi

$$Y - y = f'(x)(X - x) \quad (1.6)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda X, Y - urinma nuqtalarining o'zgaruvchi koordinatalari, $f'(x)$ - izlanayotgan funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi (urinmaning burchak koeffitsiyenti). Urinmaning Oy o'qidan ajratadigan kesmasini topish uchun $X = 0$ deymiz. U holda $Y = y - xf'(x)$ hosil bo'ladi. Ikkinchi tomondan masalaning shartiga ko'ra, $OB = 2y$.

OB kesma uchun topilgan ikkala ifodani taqqoslab va $f'(x) = y'$ ekanini hisobga olsak,

$$y - xy' = 2y \quad (1.7)$$

yoki

$$xy' + y = 0 \quad (1.8)$$

tenglamani hosil qilamiz. (1.8)ni dx ga ko'paytiramiz va $y' = \frac{dy}{dx}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$xdy + ydx = 0 \quad (1.9)$$

yoki

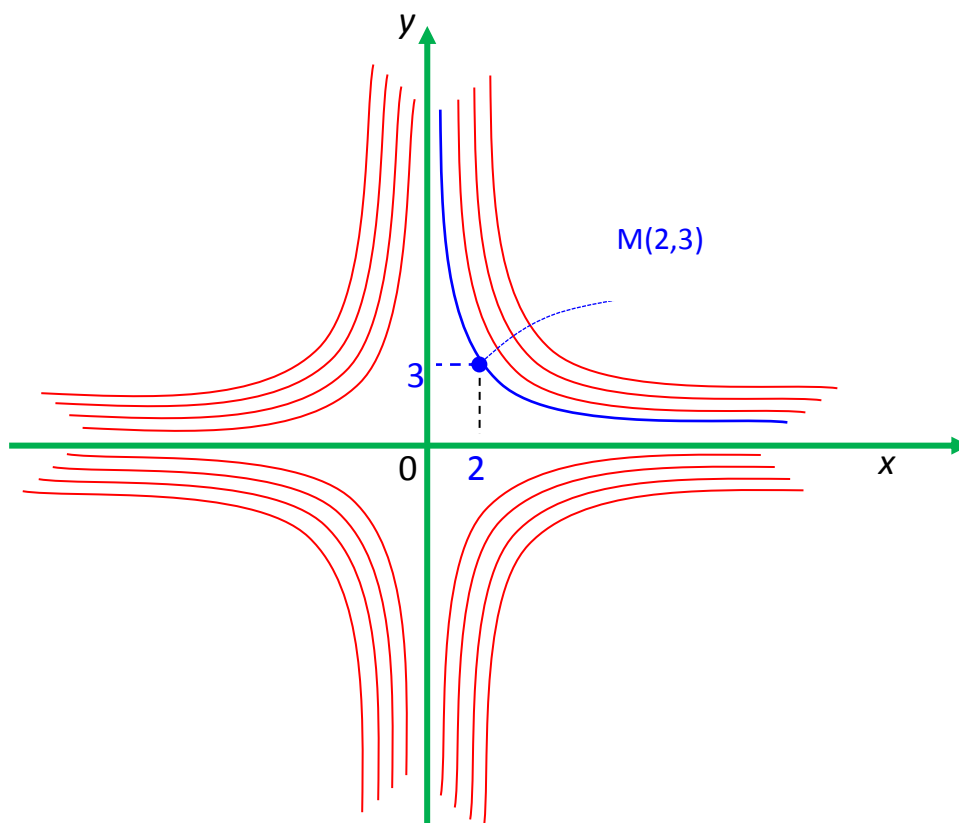
$$d(xy) = 0$$

tenglamaga kelimiz. Uni integrallab

$$xy = C \quad (1.10)$$

ifodani topamiz, bu yerda C - ixtiyoriy o'zgarmas son. (1.10) tenglama izlanayotgan egri chiziqning tenglamasini beradi, uni oshkor holda quyidagicha yozamiz:

$$y = \frac{C}{x}. \quad (1.11)$$



3-chizma.

(1.11) tenglama bitta egri chiziqni emas, balki egri chiziqlarning butun bir oilasini – asimptotalari koordinata o‘qlaridan iborat bo‘lgan teng yonli giperbolalar oilasini tashkil etadi (3-shakl).

Bu egri chiziqlar oilasidan birini ajratib olish uchun argumentning birorta tayin qiymatiga funksiyaning mos qiymatini berish kerak. Aytaylik, izlanayotgan egri chiziq $M(2,3)$ nuqtadan o‘tsin, ya’ni $x=2$ da $y=3$ bo‘lsin. Bu qiymatlarni (1.11) tenglamaga qo‘yib, C ni topamiz, shu sababli izlanayotgan egri chiziq bu holda

$$y = \frac{6}{x} \quad (1.12)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

2. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar

1-ta’rif. Erkli o‘zgaruvchi va noma’lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differentsiallarini bog‘lovchi munosabatga **differensial tenglama** deyiladi.²⁵

Agar noma’lum funksiya faqat bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama **oddiy differensial tenglama** deyiladi.

Agar noma’lum funksiya ikki yoki undan ortiq o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama **xususiy hosilali differensial tenglama** deyiladi.

²⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

2-ta’rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga *differensial tenglamaning tartibi* deyiladi.²⁶

$y'' - y' \cos x - x^2 y = 0$, $y''' = \cos x$ tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo‘ladi.

Umumiy holda n -tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ko‘rinishda belgilanadi.

3-ta’rif. *Differensial tenglamaning yechimi* yoki *integrali* deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigi *integral chiziq* deyiladi. Masalan, $\frac{dy}{dx} = 2x$

differensial tenglamaning yechimi $y = x^2$ bo‘lib, bu holda integral chiziq paraboladan iborat bo‘ladi.

Differensial tenglamaning yechimini topish jarayoni ko‘pincha integrallash bilan bog‘liq bo‘lganligi uchun bu jarayon *differensial tenglamani integrallash* deb yuritiladi.

3. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy holda

$$F(x, y, y') = 0 \quad (3.1)$$

ko‘rinishda yoziladi. (1) tenglamani y' ga nisbatan yechsak,

$$y' = f(x, y) \text{ yoki } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.2)$$

bo‘ladi. (2) tenglamaning o‘ng tomoni faqat x ning funksiyasi bo‘lsa, tenglama

$$y' = f(x) \quad (3.3)$$

ko‘rinishda bo‘lib, oxirgi tenglikdan bevosita ko‘rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni $y = F(x) + C$. Shunday qilib, birinchi tartibli differensial tenglamani cheksiz ko‘p funksiyalar to‘plami qanoatlantiradi. Ulardan birini ajratib ko‘rsatish uchun uning argumentning biror qiymatiga mos qiymatini ko‘rsatish kerak, ya’ni $x = x_0$ bo‘lganda $y = y_0$ ko‘rinishdagi shart bo‘lishi kerak. Bu shart *boshlang‘ich shart* deyiladi, u ko‘pincha quyidagicha yoziladi:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (3.4)$$

1-ta’rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning *umumiy yechimi* deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, C)$ funksiyasiga aytiladi, bunda C - ixtiyoriy o‘zgarmas son,

a) y ixtiyoriy o‘zgarmas C ning har qanday qiymatida differensial tenglamani qanoatlantiradi;

²⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

b) boshlang'ich $y|_{x=x_0} = y_0$ shart qanday bo'lganda ham, ixtiyoriy o'zgarmas C ning shunday C_0 qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, C_0)$ funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaning umumiy yechimidan C ixtiyoriy o'zgarmasning muayyan qiymatida hosil qilinadigan yechimga **xususiy yechim** deyiladi.

3-ta'rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning (3.4) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga **Koshi masalasi** deyiladi.²⁷

1-misol. $y' = \frac{5}{\cos^2 x}$, differensial tenglama uchun $y(0) = 3$ bo'ladigan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

Yechish. Avval berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5 \operatorname{tg} x + C$$

So'ng boshlang'ich shartdan foydalanib, $5 \operatorname{tg} 0 + C = 3$, bundan $C = 3$ kelib chiqadi. Demak, Koshi masalasining yechimi $y = 5 \operatorname{tg} x + 3$ bo'ladi.

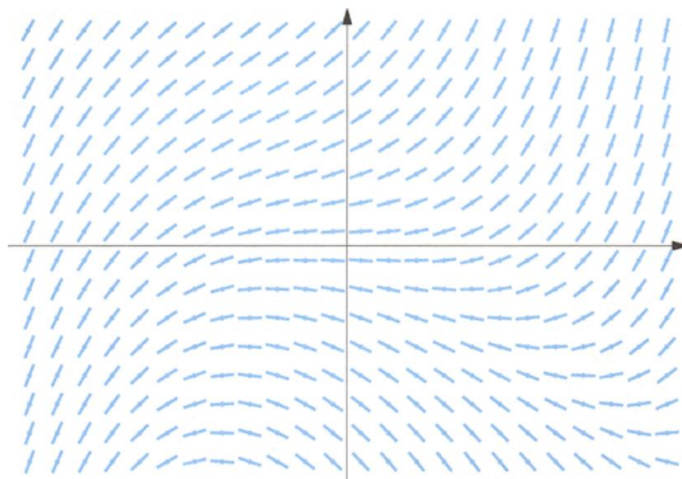
Differensial tenglamalar yechimini topishning yagona umumiy usuli mavjud emas, shuning uchun biz quyida birinchi tartibli differensial tenglamalarning ayrim turlarini ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik f akslantirish R^2 to'plamda aniqlangan haqiqiy qiymatli akslantirish bo'lsin. Quyidagi

$$y' = f(x, y) \quad (3.5)$$

Agar biz $(x, y) = (y_0, x_0)$ nuqtadan $f(x_0, y_0)$ urinma to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilishni boshlasak, (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi integral egri chiziqqa yaqin bo'lgan (x_1, y_1) nuqtaga yaqinlashamiz. Shu yerdan biz keyingi urinma bo'ylab bir oz oldinga siljiymiz, egri chiziqqa yaqin (x_2, y_2) nuqtaga kelamiz va bu jarayonni cheksiz davom ettirib (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi integral egri chiziqqa yaqin bo'lgan ko'p burchakli yo'l ega bo'lamiz. Bu biror analitik yechimi bo'lmagan differensial tenglamalarning yechimini oddiy sonli usul bilan yaqinlashtiruvchi *aniq Euler usuli* deb ham ataladi. Bu va boshqa usullar sonli usullar (numerical Analysis) ma'ruza kursida batafsil berilgan.

²⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010



11.1-chizma. $y' = (1+x)y + x^2$ funksiyaning yoʻnalishlari maydoni tasviri.

(11.5) ning yechimi berilgan akslantirishning boshlangʻich funksiyalarini topishdan iborat. Agar f funksiya x ga bogʻliq, y ga bogʻliq boʻlmasa,

$$y' = f(x) \quad (3.6)$$

koʻrinishga ega boʻladi. f funksiya I da uzluksiz deb faraz qilsak, umumiy yechimlari $y(x) = F(x) + C$ boʻladi, bu yerda F funksiya f ning I dagi boshlangʻich funksiyasi, C ixtiyoriy oʻzgarmas son.

Bundan f funksiya y ga bogʻliq boʻlmagan holda (11.5) ifoda yagona oʻzgarmasga bogʻliq boʻlgan cheksiz koʻp aniq yechimga ega.

Shuni inobatga olish kerakki, ixtiyoriy tanlangan egri chiziqli integral boshqasining vertical burishi hisoblanadi. Haqiqatdan ham (11.6) ifoda fundamental roʻl oʻynaydi, chunki bir necha hollardan, toʻgʻri keluvchi hisoblar koʻrsatadiki (11.5) yechim avvalgi maʼlum funksiyalarni izlashga olib keladi. Undan tashqari, yetarlicha umumiy taxminlar birgina shuni isbotlashi mumkinki, (11.5) ifoda har doim turli yechimlarning bir parametrlil oilasi boʻlishi mumkin emas, C erkli oʻzgarmasga bogʻliq boʻlgan holda. Biz yechimni quyidagi koʻrinishda yozamiz.

$$y = y(x; C) \quad (3.7)$$

Bunda C R dagi oʻzgaruvchi (oraliqda). (11.7) ifoda (11.5) tenglamaning umumiy integrali hisoblanadi, ayni vaqtda ixtiyoriy aniq tanlangan yechimga asoslangan. C -xususiy integral yechim boʻladi.²⁸

Misol 11.2

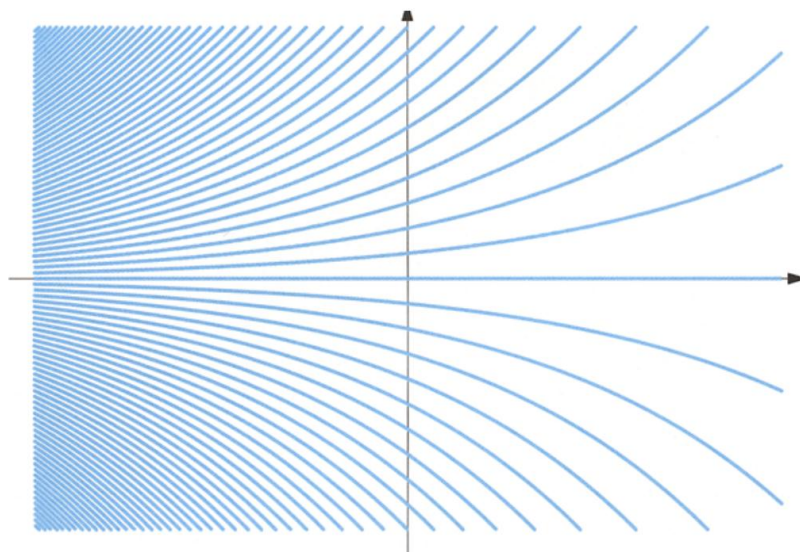
$$y' = y \quad (3.8)$$

²⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Tenglamani yechib, uning birinchi tartibli hosilasiga to'g'ri keluvchi qismini qaraymiz.

$$\text{Bizda aniqlangan } y(x) = e^x$$

Ekspontensial ifoda muhim o'rin egallaydi.



11.2-chizma. $y' = y$ tenglamaning integral egri chiziqlari.

Modomiki, differensiallash chiziqli amal hisoblanadi, ixtiyoriy $y(x) = Ce^x$, $C \in R$ funksiyaga ega bo'lgan. Biz endi quyidagilarni isbotlaymiz: xulosa qilamizki, hech bir shakl huddi shunday bo'lmaydi, demak (11.8) tenglama $y(x; C) = Ce^x$, $C \in R$ oilasiga tegishli bo'ladi.

11.2 da integral egri chiziqlar chiziladi.

4. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar

4-ta'rif. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga **o'zgaruvchilari ajralgan** differensial tenglama deyiladi.²⁹

O'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama differensial tenglamaning eng sodda turi bo'lib, uning umumiy yechimi tenglikni hadlab integrallash orqali topiladi, ya'ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Ixtiyoriy o'zgarmasni berilgan tenglama uchun qulay bo'lgan istalgan ko'rinishda olish mumkin.

2-misol. $x dx + y dy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani bevosita integrallasak,

$$\int x dx + \int y dy = C, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \text{ yoki } x^2 + y^2 = C_1$$

²⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

umumiy yechim bo'ladi .

5-ta'rif. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ko'rinishdagi differensial tenglamada $M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$ bo'lsa bunday tenglamaga *o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi.³⁰

Bunday differensial tenglamani $M_2(y)N_1(x)$ ga bo'lib,

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

Eslatma. $y' = f_1(x)f_2(y)$ yoki $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$ ko'rinishdagi tenglama ham *o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi.

Bunday differensial tenglamani $f_2(y)$ ga bo'lib, dx ga ko'paytirib

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

3-misol. $\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O'zgaruvchilarini ajratib $\frac{dy}{1 + y^2} = xdx$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamani bevosita integrallab,

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$$

tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

4-misol. $y' = y(1 - y)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O'zgaruvchilarini ajratib quyidai tenglamani hosil qilamiz.

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int dt$$

tenglikni o'ng tomonini y bo'yicha chap tomonini t bo'yicha integrallab quyidagiga ega bo'lamiz:

³⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\log \left| \frac{y}{1-y} \right| = t + C$$

bundan $\left| \frac{y}{1-y} \right| = e^{t+C} = ke^t$, bu yerda $k = e^C$ ixtiyoriy musbat o'zgarmas son. Shuning

uchun $\frac{y}{1-y} = \pm ke^t = Ke^t$, bu yerda K nol bo'lmagan o'zgarmas son. Demak yechim

$$\text{quyidagidan iborat } y(t) = \frac{Ke^t}{1 + Ke^t}.$$

O'zgaruvchilari ajraladigan bir jinsli differensial tenglamalar

$$a) \quad y = \frac{1}{2}(1+x^2)\log(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

b) $h(y) = y$ akslantirish $y = 0$ da 0 ga teng, demak y singulyar integral hisoblanadi.

$y \neq 0$ deb faraz qilamiz va o'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x+2}{x(x+1)} dx$$

Integralni o'ng qismi bo'yicha bo'laklab hisoblaymiz:

$$\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$$

Ya'ni,

$$\int \frac{x+2}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2\log|x| - \log|x+1| + \log C = \log \frac{Cx^2}{|x+1|}, \quad C > 0.$$

Shunday qilib

$$\log|y| = \log \frac{Cx^2}{|x+1|}, \quad C > 0.$$

$$|y| = \frac{Cx^2}{|x+1|}, \quad C > 0.$$

$$y = \frac{Cx^2}{x+1}, \quad C \neq 0.$$

singulyar integral $y = 0$ to'plamga tegishli bo'ladi, agar $C = 0$ qiymatni qabul qilsa.

c) Logarifm mavjudligi tufayli masalada $x > 0$ bo'lishi shart. $h(y) = y^2 - 1$ Tenglamani

$$\text{quyidagicha o'zgartirsak } y' = \frac{y^2 - 1}{x \log x}$$

Shunday qilib $y = 1, y = -1$ akslantirish yagona echimidir. Endi $y \neq \pm 1$ deb faraz

qilamiz; Teskari bo'lgan o'zgaruvchilarni ajratsak

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int \frac{1}{x \log x} dx.$$

Chap integralni bo'laklab integrallash va o'ng tomonda $t = \log x$ o'zgartirish kiritilishi

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \log |\log x| + \log C = \log C |\log x|, \quad C > 0,$$

ni beradi.

$$\log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \log C \log^2 x, \quad C > 0,$$

yoki

$$\frac{y-1}{y+1} = C \log^2 x, \quad C \neq 0;$$

Barchasi birgalikda, umumiy integral

$$y = \frac{1 + C \log^2 x}{1 - C \log^2 x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

$y = 1$ $C = 0$ da yagona yechimga ega.

$$\text{d) } y = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} (\tan x - x + C) \right]^{3/2} \quad \text{uzluksiz } y = -\frac{3}{2}. \text{ yechimni qo'shing.}^{31}$$

2. Bir turdagi differensial tenglamalar:

a) faraz qilamiz $x \neq 0$ deb, $4x^2$ ga bo'lsak

$$y' = \frac{1}{4} \frac{y^2}{x^2} + \frac{3}{2} \frac{y}{x} - \frac{3}{4}$$

³¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

bo'ladi.

$z = \frac{y}{x}$ o'zgartirish kiritsak, $y' = z + xz'$ tenglamaga kelimiz, bundan

$$z + xz' = \frac{1}{4}z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{3}{4},$$

$4xz' = (z-1)(z+3)$. Shunday ekan $\varphi(z) = (z-1)(z+3)$ funksiya

$z=1, z=-3$, nuqtalarga nolga teng, $y=x, y=-3x$ funksiyalar yagona integrallar

hisoblanadi. Umumiy yechimni topish uchun o'zgaruvchilarga ajratamiz

$$\int \frac{4}{(z-1)(z+3)} dz = \int \frac{1}{x} dx.$$

Endi bu integralni, sodda kasrlar yig'indisiga ko'rinishida yozamiz:

$$\frac{4}{(z-1)(z+3)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+3)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3},$$

O'ng tomonni integrallab,

$$\int \frac{4}{(z-1)(z+3)} dz = \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} \right) dz = \log \left| \frac{z-1}{z+3} \right| + c.$$

Natijada, $\log \left| \frac{z-1}{z+3} \right| = \log C|x|, \quad C > 0,$

$$\frac{z-1}{z+3} = Cx, \quad C \neq 0, \quad z = \frac{1+3Cx^2}{1-Cx}, \quad C \in \mathbb{R};$$

$z=1$ yagona echimni o'z ichiga oladi. y o'zgaruvchiga qaytsak, umumiy integral

yechim $y = \frac{1+3Cx^2}{1-Cx}, \quad C \in \mathbb{R}$ bo'ladi.

b) $y = \frac{1}{2}x \tan(2 \log C|x|), \quad C > 0;$ c) $y = \pm x \sqrt{2 \log C|x|}, \quad C > 0.$ Agar $x \neq 0$

x^2 ga b o'lsak, $y' = \frac{y^2}{x^2} e^{x/y} + \frac{y}{x}$. tenglamaga kelimiz. $z = \frac{y}{x}$ almashtirish bajarsak,

$$y'' = z + xz',$$

shunday qilib, $z + xz' = z^2 e^{1/z} + z$, bo'ladi,

Bundan $xz' = z^2 e^{1/z}$, $y = 0$ ga mos bo'lgan $z = 0$ funksiya bir jinsli differensial

tenglamalarning singulyar integrali $\int \frac{e^{-1/z}}{z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx$ hisoblanadi.

$$e^{-1/z} = \log C|x|, \quad C > 0, \quad -\frac{1}{z} = \log \log C|x|, \quad C > 0, \quad z = -\frac{1}{\log \log C|x|}, \quad C > 0,$$

$$y = -\frac{x}{\log \log C|x|}, \quad C > 0$$

3. Chiziqli ODT lar:

$$a) \quad y = \frac{1}{3} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) + Ce^{-\frac{3}{2}x^2}$$

b) Quyida

$$a(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{va} \quad b(x) = -\frac{3x+2}{x^3} \quad \text{bo'lgandagi (11.18) tenglikni qo'llasak,}$$

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(-\frac{3x+2}{x^3} \right) dx = e^{\log|x|} \int e^{-\log|x|} \left(-\frac{3x+2}{x^3} \right) dx = |x| \int \frac{-(3x+2)}{|x|x^3} dx \\ &= x \int \frac{-(3x+2)}{xx^3} dx = x \left(\int -\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4} \right) dx = x \left(\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + C \right) = \frac{3}{2x} + \frac{2}{3x^2} + Cx, \quad C \in R. \end{aligned}$$

Tenglikni hosil qilamiz.

$$y' + \frac{1}{x-1} y = \frac{2x}{x-1}$$

ni yozsak (11.18) formlani bo'lib olamiz, bu yerda $a(x) = \frac{1}{x-1}$, $b(x) = \frac{2x}{x-1}$. U xolda

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x-1} dx} \int e^{\int \frac{1}{x-1} dx} \frac{2x}{x-1} dx = e^{-\log|x-1|} \int e^{\log|x-1|} \frac{2x}{x-1} dx = \frac{1}{|x-1|} \int |x-1| \frac{2x}{x-1} dx = \\ &= \frac{1}{x-1} \int 2x dx = \frac{1}{x-1} (x^2 + C), \quad C \in R. \end{aligned}$$

$$d) \quad y = 2x \arctan x + Cx, \quad C \in R$$

4. Tenglama ajralgan o'zgaruvchilarga ega, ammo $y=0$ yechim qabul qila olmaydi, chunki u $y(0)=1$ shartini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun

$$\int \frac{1}{1-e^{-y}} dy = \int \frac{1}{2x+1} dx.$$

$t = e^{-y}$ o'zgartirish kiritsak (demak $dt = -e^{-y} dy$, $-\frac{1}{t} dt = dy$) hosil boladi.

$$\int \frac{1}{1-e^{-y}} dy = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \log \left| \frac{t-1}{t} \right| + c = \log \left| 1 - \frac{1}{t} \right| + c = \log |1 - e^y| + c.$$

So'ng

$$\log |1 - e^y| = \frac{1}{2} \log |2x+1| + \log C, \quad C > 0,$$

$$\log |1 - e^y| = \log C \sqrt{|2x+1|}, \quad C > 0,$$

$$|1 - e^y| = C \sqrt{|2x+1|}, \quad C > 0,$$

$$1 - e^y = C \sqrt{|2x+1|}, \quad C \neq 0,$$

Xulosa qilib, umumiy integralni

$$y = \log \left(1 - C \sqrt{|2x+1|} \right), \quad C \in R,$$

$y=0$ ni ham inobatga olib, $C = 1 - e$ dan mumkin bo'lgan yechim

$$y = \log \left(1 + (e-1) \sqrt{|2x+1|} \right),$$

hisoblanadi.

Mustaqil bajarish uchun misollar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $(1+y)dy - (1-x)dx = 0$; 2) $(xy^2 + x)dx = (y - x^2y)dy$;

3) $x^2dy + (y-1)dx = 0$; 4) $2(xy+y)dx = xdy$.

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

- 1) $x^2 dx + y dy = 0$, $x = 0$ da $y = 1$;
- 2) $(1 + x^2) dy - 2x(y + 3) dx = 0$, $x = 0$ bo'lganda $y = -1$;
- 3) $(1 + x)y dx = (y - 1)x dy$, $x = 1$ da $y = 1$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differensial tenglama qanday tenglama?
3. Xususiy hosilali differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning tartibi nima?
5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?
6. Umumiy va xususiy yechimlar qanday yechimlar?
7. Boshlang'ich shart deb nimaga aytiladi?
8. Qanday masalaga Koshi masalasi deyiladi?
9. Qanday tenglamaga o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi?
10. Qanday tenglamaga o'zgaruvchilari

5-MA'RUZA BIRINCHI TARTIBLI BIR JINSLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. BERNULLI TENGLAMASI

Reja:

1. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.
2. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.
3. Bernulli tenglamasi.

Tayanch ibora va tushunchalar

n o'lchovli bir jinsli funksiya, birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi.

1. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar

Dastlab bir jinsli funksiya ta'rif beramiz.

1-ta'rif. Agar $f(x,y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarni mos ravishda tx va ty ga almashtirganda (bu yerda t - ixtiyoriy parametr) t^n ga ko'paytirilgan yana o'sha funksiya hosil bo'lsa, ya'ni $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ shart bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya **n o'lchovli bir jinsli funksiya** deb ataladi, bunda n biror son.³²

Masalan, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya uchun $f(tx,ty) = tx \cdot ty - (ty)^2 = t^2(xy - y^2)$ bo'lib, bu funksiya $n = 2$ o'lchovli bir jinsli funksiya bo'ladi. $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, $n = 0$ o'lchovli bir jinsli funksiya (buni tekshirib ko'ring).

$f(tx,ty) = f(x,y)$ shartga bo'ysunadigan nol o'lchovli bir jinsli funksiya $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ko'rinishda yozilishi mumkin. Haqiqatdan ham, t parametrni ixtiyoriy tanlab olish mumkin bo'lgani uchun $t = \frac{1}{x}$ deb olamiz. U holda $f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Quyida nol o'lchovli funksiya bilan ish ko'ramiz:

2-ta'rif. $y' = f(x,y)$ differensial tenglamada $f(x,y)$ funksiya nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, bunday differensial tenglamaga ***birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi.³³

Shunday qilib, bir jinsli differensial tenglamani $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Bir jinsli tenglama $y = xu(x)$ almashtirish bilan o'zgaruvchilari ajraladigan $xu' = \varphi(u) - u$ differensial tenglamaga keltiriladi.

³² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

³³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

1-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y = x \cdot u$ almashtirish olib, $y' = u + xu'$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$u + xu' = \frac{x \cdot xu + x^2 u^2}{x^2}$$

bo'lib, $u + xu' = u + u^2$ yoki $xu' = u^2$, $\frac{xdu}{dx} = u^2$ bo'ladi. Oxirgi tenglamada o'zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln c, \quad \ln|cx| = -\frac{1}{u}, \quad u = \frac{y}{x}$$

bo'lganligi uchun

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad \text{yoki} \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

2-misol. $t^2 y' = y^2 + ty + t^2$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. t^2 ga bo'lib birinchi tartibli bir jinsli tenglamaga keltiramiz ya'ni, $y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2 + \frac{y}{t} + 1$, $\frac{y}{t}$ ni z bilan belgilab tenglamani o'ng tomonini quyidagicha yozib

olamiz: $\varphi(z) = z^2 + z + 1$, $y = tz$, $y' = z + tz'$ bu belgilashlarni tenglamaga olib kelib qoyib yangi tenglamani hosil qilamiz: $z + tz' = z^2 + z + 1$ bundan $z' = \frac{z^2 + 1}{t}$

o'zgaruvchilarni ajratib integrallaymiz $\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int \frac{dt}{t}$. Integrallash natijasida $\arctan z = \log|t| + C$ umumiy yechim quyidagi korinishda bo'ladi $y(t) = t \tan(\log|t| + C)$.

2. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Ta'rif. Noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan tenglamalar **birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar** deb ataladi.

Chiziqli tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (2.1)$$

bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ lar x ning uzluksiz funksiyalari(yoki o'zgarmlar).³⁴

Agar tenglamaning o'ng tomoni $Q(x) \equiv 0$ bo'lsa, (2.1) tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'ladi. $Q(x) \neq 0$ deb faraz qilamiz. (2.1) tenglamaning yechimini x ning ikkita funksiyasining ko'paytmasi shaklida izlaymiz:

$$y = u(x)v(x) \Leftrightarrow y = uv \quad (2.2)$$

Bu funksiyalardan birini ixtiyoriy tanlab olish mumkin, ikkinchisini esa (2.1)–tenglama asosida aniqlanadi. (2.2) tenglikdan y' ni hisoblaymiz:

$$y' = u'v + uv' \quad (2.3)$$

u va y' ni (1) tenglamaga qo'yamiz, natijada u quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \quad (2.4)$$

yoki

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \quad (2.5)$$

Funksiyalardan birini ixtiyoriy tanlab olish mumkin bo'lgani uchun v funksiyani qavs ichida turgan ifoda nolga teng bo'ladigan qilib olamiz, ya'ni

$$v' + P(x)v = 0 \quad (2.6)$$

bo'lishini talab qilamiz. U holda u funksiyani topish uchun (2.5) tenglikdan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$u'v = Q(x) \quad (2.7)$$

Dastlab, (2.6) tenglamadan v ni topamiz:

$$v = C \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

(2.6) tenglamaning noldan farqli birorta yechimi zarur, shuning uchun $S=1$ deb olamiz. U holda

$$v = e^{-\int P(x)dx}. \quad (2.8)$$

v ning bu topilgan ifodasini (2.7) tenglamaga qo'yib, u funksiya uchun o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

$$u' \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Bu tenglamani yechamiz:

$$u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C \quad (2.9)$$

(2.8) va (2.9) lar u va v ning x orqali ifodalarini beradi. u va v ni (2.2)ga qo'yib, berilgan chiziqli tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx \right). \quad (2.10)$$

1-misol. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo'lib $P(x) = x$, $Q(x) = x$. (2.10) ga asosan,

³⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$y = e^{-\int x dx} \left[C + \int x \cdot e^{\int x dx} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int e^{\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C \right).$$

Demak, umumiy yechim

$$y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

bo'ladi.

4. Chiziqli ODT lar:

$$a) \quad y = \frac{1}{3} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) + Ce^{-\frac{3}{2}x^2}$$

b) Quyida

$$a(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{va} \quad b(x) = -\frac{3x+2}{x^3} \quad \text{bo'lgandagi (11.18) tenglikni qo'llasak,}$$

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(-\frac{3x+2}{x^3} \right) dx = e^{\log|x|} \int e^{-\log|x|} \left(-\frac{3x+2}{x^3} \right) dx = |x| \int \frac{-(3x+2)}{|x|x^3} dx \\ &= x \int \frac{-(3x+2)}{xx^3} dx = x \left(\int -\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4} \right) dx = x \left(\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + C \right) = \frac{3}{2x} + \frac{2}{3x^2} + Cx, \quad C \in R. \end{aligned}$$

Tenglikni hosil qilamiz.

$$y' + \frac{1}{x-1} y = \frac{2x}{x-1}$$

ni yozsak (11.18) formlari bo'lib olamiz, bu yerda $a(x) = \frac{1}{x-1}$, $b(x) = \frac{2x}{x-1}$. U xolda

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x-1} dx} \int e^{\int \frac{1}{x-1} dx} \frac{2x}{x-1} dx = e^{-\log|x-1|} \int e^{\log|x-1|} \frac{2x}{x-1} dx = \frac{1}{|x-1|} \int |x-1| \frac{2x}{x-1} dx = \\ &= \frac{1}{x-1} \int 2x dx = \frac{1}{x-1} (x^2 + C), \quad C \in R. \end{aligned}$$

$$d) \quad y = 2x \arctan x + Cx, \quad C \in R$$

4. Tenglama ajralgan o'zgaruvchilarga ega, ammo $y = 0$ yechim qabul qila olmaydi,

chunki u $y(0) = 1$ shartini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun

$$\int \frac{1}{1-e^{-y}} dy = \int \frac{1}{2x+1} dx.$$

$t = e^{-y}$ o'zgartirish kiritsak (demak $dt = -e^{-y} dy, -\frac{1}{t} dt = dy$) hosil boladi.

$$\int \frac{1}{1-e^{-y}} dy = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \log \left| \frac{t-1}{t} \right| + c = \log \left| 1 - \frac{1}{t} \right| + c = \log |1 - e^y| + c.$$

So'ng

$$\log |1 - e^y| = \frac{1}{2} \log |2x+1| + \log C, \quad C > 0,$$

$$\log |1 - e^y| = \log C \sqrt{|2x+1|}, \quad C > 0,$$

$$|1 - e^y| = C \sqrt{|2x+1|}, \quad C > 0,$$

$$1 - e^y = C \sqrt{|2x+1|}, \quad C \neq 0,$$

Xulosa qilib, umumiy integralni

$$y = \log \left(1 - C \sqrt{|2x+1|} \right), \quad C \in R,$$

$y = 0$ ni ham inobatga olib, $C = 1 - e$ dan mumkin bo'lgan yechim

$$y = \log \left(1 + (e-1) \sqrt{|2x+1|} \right),$$

hisoblanadi.

5) chiqili tenglamaning umumiy integrali quyidagicha yoziladi

$$y = e^{-\int 2dx} \int e^{\int 2dx} e^{-2x} dx = e^{-2x} (x + C), \quad C \in R,$$

$y(0) = 0$ chegaralangan, $x = 0$ ni $y'(x) = -2y(x) + e^{-2x} 0$ tenglamaga qo'ysak,

$$y(0) = \frac{1}{2} \quad \text{va} \quad C = \frac{1}{2} \quad \text{deb olsak, umumiy yechimga erishamiz} \quad y = e^{-2x} \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

$$6) y = \log \left(2e^{x^4 \left(\log x - \frac{1}{4} \right) - 1} \right).$$

7. $x \in (-2, 2), x^2 - 4 < 0.$ bo'lsin. $y(0) = -1$ $x = 0$ nuqtada $y'(0) < 0$

$$-\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{3x}{x^2 - 4} dx, \quad -\log|y| = -\log(-y) = \frac{3}{2} \log|x^2 - 4| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$-\frac{1}{y} = C(4 - x^2)^{3/2}, \quad C > 0, \quad y = C(4 - x^2)^{-3/2}, \quad C < 0$$

7) $x(-2, 2)$, $x^2 - 4 < 0$ bo'lganda. $y(0) = -1$ dastlabki holat yana $x = 0$ da $y(0) < 0$ ga chegaralanish imkonini beradi. Bu esa, o'zgaruvchilarni ajratayotganimizni bildiradi.

$$-\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{3x}{x^2 - 4} dx,$$

$$-\log|y| = -\log(-y) = \frac{3}{2} \log|x^2 - 4| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$-\frac{1}{y} = C(4 - x^2)^{3/2}, \quad C > 0,$$

$$y = C(4 - x^2)^{-3/2}, \quad C < 0.$$

$y(0) = -1$ bo'lgani uchun, $C = -8$ ga tengbo'lishi kerak va yechim hisoblanadi.

$$y = -\frac{8}{(4 - x^2)^{3/2}}.$$

E'tibor qiling, $y = 0$ doimiy funksiya e'tiborga olinmadi, chunki u $y(0) = -1$ ga mos kelmadi.³⁵

8) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ikkilangan burchak formulasidan foydalanib

$$y' \sin x \cos x = y + \cos x$$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ uchun $\sin x \cos x \neq 0$ ga erishamiz, va shunday qilib

$$y' = \frac{1}{\sin x \cos x} y + \frac{1}{\sin x}.$$

Integrallab

$$y = e^{\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx} \int e^{-\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx} \cdot \frac{1}{\sin x} dx$$

³⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Bu yechim chiziqli tenglama integrali hisoblanadi.

$$S = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$$

ni hisoblaylik, $t = \sin x$ ($dt = \cos x dx$, $\cos^2 x = 1 - t^2$) deb olib va ratsional funktsiyani integrallab:

$$S = \int \frac{1}{t(1-t^2)} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)} \right) dt = \log|t| - \frac{1}{2} \log|1-t| - \frac{1}{2} \log|1+t| + C =$$

$$= \log \frac{|t|}{\sqrt{|1-t^2|}} + C = \log \frac{\sin x}{\cos x} + C, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \frac{\sin x}{\cos x} \left(-\frac{1}{\sin x} + C \right), \quad C \in \mathbb{R},$$

ni hosil qilamiz.

U xolda bir jinsli differensial tenglama yechimi

$$y = \frac{C \sin x - 1}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

bo'ladi.

Yechimning $\frac{\pi}{2}$ ga intilgandagi qiymati topilsin.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{C \sin x - 1}{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - C \cos t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - C(1 + \sigma(t^2))}{t + \sigma(t^2)} = 0$$

Ammo $C = 1$ bo'lgandagina,

$$y = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

yechim hisoblanadi.

9) Tenglama chiziqli, demak

$$y = e^{\int (2+\alpha) dx} \int e^{-\int (2+\alpha) dx} (-2e^{\alpha x}) dx = e^{(2+\alpha)x} (e^{-2x} + C) = e^{\alpha x} (1 + Ce^{2x}), \quad C \in \mathbb{R}.$$

$y(0) = 3$ dan $3 = 1 + C$, va $C = 2$ kelib chiqadi. Shunday qilib, biz xoxlagan

$$y = e^{\alpha x} (1 + 2e^{2x})$$

yechim hisoblanadi.

Xosmas integral

$$\int_0^{+\infty} (e^{\alpha x} + 2e^{(\alpha+2)x}) dx$$

Eng katta qiymatning eksponentasi manfiy bo'lganda yaqinlashadi.

Demak, integral $\alpha < -2$.

10) Chiziqli tenglamalar uchun formuladan

$$y = e^{\alpha \int \frac{1}{x} dx} \left(3 \int e^{-\alpha \int \frac{1}{x} dx} x^b dx \right) = x^a \left(x^{b-a} dx \right) = \begin{cases} x^a \left(\frac{3}{b-a+1} x^{b-a+1} + C \right) & \text{agar } b-a \neq -1, \\ x^a (3 \log x + C) & \text{agar } b-a = -1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{b-a+1} x^{b+1} + Cx^a & \text{agar } b-a \neq -1, \\ 3x^a \log x + Cx^a & \text{agar } b-a = -1, \end{cases}$$

bevosita $y(2) = 1$

$$\begin{cases} \frac{3}{b-a+1} 2^{b+1} + C2^a = 1 & \text{agar } b-a \neq -1, \\ 3 \cdot 2^a \log 2 + C2^a = 1 & \text{agar } b-a = -1, \end{cases}$$

Bundan konstanta xususiy ekanligi kelib chiqadi

$$\begin{cases} C = 2^{-a} \left(1 - \frac{3}{b-a+1} 2^{b+1} \right) & \text{agar } b-a \neq -1, \\ C = 2^{-a} - 3 \log 2 & \text{agar } b-a = -1. \end{cases}$$

Xulosa qilib aytganda,

$$y = \begin{cases} \frac{3}{b-a+1} x^{b+1} + 2^{-a} \left(1 - \frac{3}{b-a+1} 2^{b+1} \right) x^a & \text{agar } b-a \neq -1, \\ 3x^a \log x + (2^{-a} - 3 \log 2) x^a & \text{agar } b-a = -1. \end{cases}$$

11) Bir jinsli differensial tenglama $y'(x) = -3xy(x) + kx$

a) Tenglama chiziqli, quyidagi integral bilan.

$$y = e^{-3\int x dx} \int e^{3\int x dx} kx dx = e^{-\frac{3}{2}x^2} \left(\frac{k}{3} e^{\frac{3}{2}x^2} + C \right) = \frac{k}{3} + C e^{-\frac{3}{2}x^2}, \quad C \in R.$$

$y(0) = 0$ shart $0 = \frac{k}{3} + C$, $C = -\frac{k}{3}$ ni keltirib chiqaradi, va yechim hisoblanadi:

$$y = \frac{k}{3} \left(1 - e^{-\frac{3}{2}x^2} \right)$$

b) Yechim uchun quyidagi ekvivalentlik bajarilishi kerak

$$\frac{k}{3} \left(1 - e^{-\frac{3}{2}x^2} \right) \sim x^2 \quad x \rightarrow 0 \text{ da.}$$

Ammo

$$x \rightarrow 0 \text{ intilgani uchun} \quad e^{-\frac{3}{2}x^2} = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \sigma(x^2).$$

$$y(x) = \frac{k}{3} \left(1 - 1 + \frac{3}{2}x^2 + \sigma(x^2) \right) = \frac{k}{2}x^2 + \sigma(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

Shundayqilib $\frac{k}{2} = 1$, $k = 2$ yordamida yechilgan.

12) Yeching

$$y' = \frac{y^2 - 2y - 3}{2(1 + 4x)}:$$

$$\text{a) } y(x) = \frac{3 + C\sqrt{1 + 4x}}{1 - C\sqrt{1 + 4x}}, \quad C \in R \text{ va } y(x) = -1 \text{ konstanta bilan.}$$

$$\text{b) } y_0(x) = \frac{3 - C\sqrt{1 + 4x}}{1 + C\sqrt{1 + 4x}}, \quad \text{c) } T_2(x) = 1 - 2x + 4x^2 + \sigma(x^2).$$

3. Bernulli tenglamasi

Ushbu

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (3.1)$$

ko'rinishdagi tenglamani **Bernulli tenglamasi** deb ataladi. Bunda $P(x)$ va $Q(x)$ lar x ning uzluksiz funksiyalari hamda $n \neq 0$ va $n \neq 1$.³⁶

³⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Bernulli tenglamasini y^n ga bo'lamiz:

$$y^{-n} \cdot y' + P(x) \cdot y^{-n+1} = Q(x). \quad (3.2)$$

So'ngra $z = y^{-n+1}$ almashtirish bajarib, $z' = (-n+1) \cdot y^{-n} \cdot y'$ ekanligini hisobga olib (3.2)ga qo'ysak,

$$z' + (-n+1) \cdot P(x) \cdot z = (-n+1) \cdot Q(x) \quad (3.3)$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi topiladi hamda z o'rniga y^{-n+1} ni qo'yib, Bernulli tenglamasining umumiy yechimi topiladi.

2-misol. $y' = t^3 y^2 + 2ty$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y^3 bo'lib, $q(t) = t^3$, $p(t) = 2t$ va $n = 2$. Yangi o'zgaruvchi kiritamiz $z = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$ u holda tenglama quyidagi korinishni oladi $z' = -(2tz + t^3)$ bu Z ga nisbatan chiziqli differensial tenglama buni yechib quyidagini hosil qilamiz ya'ni, $z(t) = Ce^{t^2} - (2 + t^2)$. Z ning o'rniga y^{-1} ni qo'yib, tenglamaning umumiy yechimi quyidagi korinishni oladi $y(t) = \frac{1}{Ce^{t^2} - (2 + t^2)}$.

Bu berilgan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)y}{x^2}$; 2) $x^2 y' = y^2 - xy + x^2$; 3) $(x^2 - 2xy)dy = (xy - y^2)dx$.

2. Boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping:

- 1) $xy^2 - y' = x^3 + y^3$, $x=1$ bo'lganda $y=3$;
 2) $(x-y)dx + xdy = 0$, $x=1$ bo'lganda $y=0$;
 3) $y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0$, $x=1$ bo'lganda $y=1$.

3/Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

- 1) $\frac{y}{x} = -1$; 2) $y' + y = e^{-x}$; 3) $x^2 y' - 2xy = 3$; 4) $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2$;
 5) $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$; 6) $(2x+1)y' + y = x$; 7) $y' - y \tan x = \cot x$; 8) $y' + y \cos x = \sin 2x$.

4. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

- 1) $xy' + y = 3$, $x=1$ da $y=1$; 2) $(1+x^2)y' - xy = 2x$, $x=0$ bo'lganda $y=0$;
 3) $xy' + y = x+1$, $x=2$ bo'lganda $y=3$.

5. Quyidagi Bernulli tenglamalarining umumiy yechimlarini toping

$$1) y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}, \quad 2) y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^3}.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Bir jinsli funksiya deb nimaga aytiladi
2. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
3. Bir jinsli differensial tenglamani qanday almashtirish yordamida yechiladi?
4. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
5. Chiziqli differensial tenglamaning yechimini topishda qanday almashtirish bajariladi?
6. Qanday tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi?
7. Bernulli tenglamasi qanday almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi?

6-MA'RUZA TARTIBINI PASAYTIRISH MUMKIN BO'LGAN YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. YUQORI TARTIBLI CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMANING UMUMIY YECHIMINI STRUKTURASI HAQIDAGI TEOREMA. VORONSKIY DETERMINANTI

Reja:

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalar.
2. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar.
3. $F(x, y, y', y'') = 0$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar.
4. $F(y, y', y'') = 0$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yuqori tartibli differensial tenglama, bevosita ketma-ket integrallanib yechiladigan yuqori tartibli differensial tenglamalar, tartibini pasaytirish, noma'lum funksiya qatnashmagan, erkli o'zgaruvchi oshkor qatnashmagan.

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

Tenglamaning tartibi birdan yuqori bo'lsa, **yuqori tartibli differensial tenglama** deyiladi. n -tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

yoki, agar mumkin bo'lsa, yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

shaklda bo'ladi.

Teorema(Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqida). Agar $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ va uning $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ argumentlari bo'yicha olingan xususiy hosilalari $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ nuqtani o'z ichiga oluvchi biror D sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ tenglamaning

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ yechimi mavjud va yagonadir.³⁷

2. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar

$y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglamani ketma-ket n marta bevosita integrallash bilan umumiy yechim topiladi. Har bir integrallashda bittadan ixtiyoriy

³⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

o'zgarmas hosil bo'lib, natijada n ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq umumiy yechim hosil bo'ladi.

1-misol. $y'' = \cos 2x$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo'lganda $y = 0$, $y' = 0$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.³⁸

Yechish: Bir marta integrallab quyidagini topamiz:

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$$

ya'ni,

$$dy = \frac{1}{2} \sin 2x dx + C_1 dx.$$

Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int dy = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx + \int C_1 dx, \quad y = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2$$

umumiy yechimni olamiz.

Endi berilgan boshlang'ich shartlarda Koshi masalasini yechamiz: $x = 0$ bo'lganda $y = 0$, $y' = 0$ bo'lganligi uchun,

$$-\frac{1}{4} \cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin 0 + C_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Shunday qilib, Koshi masalasining yechimi

$$y = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4}$$

bo'ladi.

2-misol. $y^{IV} = \frac{8}{(x-3)^5}$ tenglamani umumiy yechimini toping.

Yechish: Tenglamani har ikkala tomonini integrallab quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$y''' = \int y^{IV} dx = \int \frac{8dx}{(x-3)^5} = -\frac{2}{(x-3)^4} + \tilde{C}_1.$$

Integrallash jarayonini huddi shunday davom ettirib tenglamani umumiy yechimini topamiz:

$$y'' = \int y''' dx = \int \left(-\frac{2}{(x-3)^4} + \tilde{C}_1 \right) dx = \frac{2}{3(x-3)^3} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2,$$

$$y' = \int y'' dx = \int \left(\frac{2}{3(x-3)^3} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \right) dx = -\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{1}{2} \tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3,$$

³⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\begin{aligned} y &= \int y' dx = \int \left(-\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{1}{2} \tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3 \right) dx = \\ &= \frac{1}{3(x-3)} + \frac{1}{6} \tilde{C}_1 x^3 + \frac{1}{2} \tilde{C}_2 x^2 + \tilde{C}_3 x + \tilde{C}_4 = \\ &= \frac{1}{3(x-3)} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

3. $F(x, y', y'') = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar

$F(x, y', y'') = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglama $y' = p$ va $y'' = \frac{dp}{dx}$ almashtirish orqali birinchi tartibli $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$ differensial tenglamani yechishga keltiriladi.³⁹

3-misol. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, y(1) = e, y'(1) = e^2$ tenglamani shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

Yechish: Quyidagi belgilash orqali tenglamani birinchi tartibli tenglamaga keltiramiz ya'ni, $z = y', z' = y''$. $xz' = z \ln \left(\frac{z}{x} \right)$ bu tenglamani yechish uchun yangi belgilash

kiritamiz $\frac{z}{x} = u(x)$ deb olib $z = xu(x) \Rightarrow z' = u + xu'$. Bu almashtirishlarni tenglamaga qo'yib quyidagi tenglamani olamiz: $u + xu' = u \ln u$

$$xu' = u \ln u - u$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |\ln u - 1| = \ln x + \ln C_1,$$

$$\ln u - 1 = C_1 x,$$

$$u = e^{1+C_1 x}, z = x e^{1+C_1 x}.$$

$z = y'$ bo'lgani uchun $y' = z = x e^{1+C_1 x}$ bo'ladi. Bu tenglamani har ikkala tomonini integrallab tenglamaning umumiy yechimni topamiz:

$$y = \int x e^{1+C_1 x} dx = \frac{1}{C_1} \int x d(e^{1+C_1 x}) = \frac{1}{C_1} (x e^{1+C_1 x} - \int e^{1+C_1 x} dx) = \frac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2.$$

Boshlang'ich shartlardan foydalanib C_1 va C_2 o'zgarmaslarni topamiz:

³⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\begin{cases} e = \frac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{1+C_1} + C_2 \\ e^2 = e^{1+C_1} \end{cases} \text{ bu yerdan } C_1 = 1 \text{ va } C_2 = e \text{ ekanligini topamiz. Aniqlanganlarni}$$

tenglamani umumiy yechimidagi C_1 va C_2 larni o'rniga qoyib xususiy yechimni aniqlaymiz:

$$y = (x-1)e^{1+x} + e.$$

4-misol. $y'' = \frac{y'}{x} + x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: $y' = p$ bilan almashtirib olsak

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x$$

birinchi tartibli chiziqli tenglamaga kelimiz. Bu tenglamani yechib:

$$\begin{aligned} P &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[C_1 + \int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right] = e^{\ln x} \left[C_1 + \int x e^{-\ln x} dx \right] = x(C_1 + \int x e^{-\ln x} dx) = \\ &= x(C_1 + \int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x(C_1 + x), \quad p = y' = C_1 x + x^2, \quad y = C_1 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2 \end{aligned}$$

umumiy yechimni olamiz.

4. $F(y, y', y'') = 0$ **ko'rinishdagi differensial tenglamalar**

$F(y, y', y'') = 0$ **erkli o'qzgaruvchi oshkor qatnashmagan bunday differensial tenglamaning** umumiy yechimini $y' = p(y)$ almashtirish bajarib, birinchi tartibli tenglamaga keltirib yechim topiladi.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p(y) = p'p.$$

bo'ladi.⁴⁰

5-misol. $y'' - (y')^2 = 1$. 2-tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y' = p(y)$ almashtirish bajarib, $y'' = p'p$ ekanligini hisobga olsak, $p' = p^2 + 1$ bu hosil bo'lgan tenglamani har ikkala tomonini integrallab $\int \frac{dp}{p^2 + 1} = \int dy$ ni

hosil qilamiz bundan $\arctan p = y + C_1$, $p = \tan(y + C_1)$. Belgilashga ko'ra

$$\begin{aligned} y' &= p(y), \\ \frac{dy}{p(y)} &= dx, \\ \frac{dy}{\tan(y + C_1)} &= dx, \\ \int \frac{dy}{\tan(y + C_1)} &= \int dx \\ y &= -\log(\cos(y + C_1)) + C_2, \end{aligned}$$

⁴⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

6-misol. $yy'' - 2y'^2 = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y' = p(y)$ almashtirish bajarib, $y'' = p'p$ ekanligini hisobga olsak, $yp'p - 2p^2 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama:

$$\frac{ydp}{dy} = 2p \quad \text{yoki} \quad \frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y},$$

oxirgi tenglamani integrallab,

$$\ln p = 2\ln y + \ln C_1$$

bundan

$$p = C_1 y^2$$

bo'ladi. $p = \frac{dy}{dx}$ ni hisobga olsak,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikdan

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \quad \text{yoki} \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$$

bo'ladi. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

13) tartiblni birinchi tartibga pasaytirish mumkin bo'gan bir jinsli ikkinchi tartibli

differensial tenglamalar

a) $y = 2e^x + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in R$

b) $z = y'$ ni shunday aniqlaymizki, 1- tartibli chiziqli tenglama hosil bo'lsin

$$z' + z = x^2$$

Bu yo'l yordamida

$$z = e^{-\int dx} \int e^{\int dx} x^2 dx = e^{-x} \int x^2 e^x dx$$

ni bo'laklab integrallab (ikki marta) umumiy yechimni topamiz va y ga qaytish uchun yana

bir marta integrallaymiz

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C_1 e^{-x} + C_2, \quad C_1, C_2 \in R.$$

14) Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}, \quad C_1, C_2 \in R$$

b) Dastlab bir jinsli tenglamani yechamiz $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ xarakteri ko'phad

2 karrali $\lambda = 2$ yagona ildizga ega:

$$y_0(x; C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x) e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in R$$

u holda, $\mu = \lambda = 2$ bo'lgani uchun, $y_p(x) = \alpha x^2 e^{2x}$ ni differensiallab va tenglashtirib

$$2\alpha e^{2x} = e^{2x}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ ni keltirib chiqaradi.

Shunday qilib $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$ va bir jinsli differensial tenglama umumiy yechimi hosil

bo'ladi.

c) $\lambda^2 + 1 = 0$ xarakteristik tenglama diskriminanti $\Delta = -4$ ga ega, demak $\sigma = 0$, $\omega = 1$ ni aniqlab, bir jinsli umumiy yechimini hosil qilamiz.

$$y_0(x; C_1, C_2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in R$$

Natijada $\mu = \sigma = 0$ bo'lgani uchun xarakteristik tenglama yechamiz

$$y_p(x) = x(\alpha \cos x + \beta \sin x)$$

Bu esa

$$-2\alpha \sin x + 2\beta \cos x = 3 \cos x$$

ni beradi, demak $\alpha = 0$, $\beta = \frac{3}{2}$ dan $y_p(x) = \frac{3}{2}x \cos x$ ga kelimiz.

Demak,

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{3}{2}x \cos x, \quad C_1, C_2 \in R$$

d) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x$, $C_1, C_2 \in R$

e) $\lambda^2 - 9 = 0$ xarakteristik tenglamaning yechimi $\lambda = \pm 3$ bo'lsin, bir jinsli tenglama integrali ko'rinishida.

$$y_0(x; C_1, C_2) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in R$$

Biz $y_p(x) = \alpha x e^{-3x}$ aniq integral yechimga ega bo'lamiz.

$$-6\alpha e^{-3x} = e^{-3x},$$

Bundan kelib chiqadik $\alpha = -\frac{1}{6}$.

$y_p(x) = -\frac{1}{6} x e^{-3x}$ aniq yechim umumiy integralning bir qismi bo'lib qoldi.

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{6} x e^{-3x}, \quad C_1, C_2 \in R$$

$$f) y(x; C_1, C_2) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x, \quad C_1, C_2 \in R$$

15) Dastlabki masalalar

a) $y = e^{-x} \sin 2x$.

b) Bir jinsli differensial tenglamadan boshlaymiz va, $\lambda = 1, \lambda = 4$ ildizlarga ega bo'lgan xarakteristik tenglamaning I yechamiz. Bu holda,

$$y_0(x; C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 e^{4x}, \quad C_1, C_2 \in R$$

Integral uchun umumiy ifoda hisoblanadi. $y_p(x) = \alpha x + \beta$ aniq yechim $-5\alpha + 4\alpha x + 4\beta = 2x + 1$ ni keltirib chiqaradi.

Demak, $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{7}{8}$. Shu yo'l bilan biz, $y_p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}$ ni aniqladik. Natijada

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}, \quad C_1, C_2 \in R$$

umumiy integralga kelimiz. Boshlang'ich shaklni quyidagi sistemaga olib keladi:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

uning yechimlari $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = -\frac{1}{6}$ ni beradi.

Bulardan $y = \frac{1}{6}e^x - \frac{1}{6}e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}$ echimga kelimiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y''' = \frac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo'lganda $y = 2$, $y' = 1$, $y'' = 1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; 2) $yy'' + y'^2 = 0$; 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; 4) $y''y^3 = 1$;

5) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$; 6) $y'' + y'tgx = \sin 2x$; 7) $y'' + 2y'^2 = 0$;

8) $xy'' - y'tgx = e^x x^2$; 9) $2yy'' = (y')^2$; 10) $t \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Qanday differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish bilan yechish mumkin?
3. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglama qanday yechiladi?
4. $F(x, y', y'') = 0$ ko'rinishdagi differensial tenglama qanday almashtirish yordamida birinchi tartibli differensial tenglamaga keltiriladi?
5. Erkli o'zgaruvchi oshkor qatnashmagan differensial tenglama qanday almashtirish yordamida darajasi pasaytiriladi?

7-MA'RUZA O'ZGARMAS KOEFFITSIENTLI CHIZIQLI BIR JINSLI DIFFERENSIAL TENGLAMA

Reja:

1. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar
2. Chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning xususiy yechimlari haqida teoremlar.
3. Vronskiy determinanti.
4. Chiziqli bir jinsli differensial tenglama umumiy yechimi tuzilishi haqida.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar, tenglamaning koeffitsientlari, ozod had, n - tartibli chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tenglamalar, chiziqli bog'liq va chiziqli erkli funksiyalar sistemasi, Vronskiy determinant, fundamental yechimlari sistemasi, umumiy yechimi tuzilishi.

1. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Ta'rif -1. Agar n - tartibli differensial tenglamada izlanayotgan funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa, bunday tenglama **n - tartibli chiziqli differensial tenglama** deyiladi.⁴¹

U quyidagi ko'rinishga ega:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

Bu yerda $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ lar x ning ma'lum uzluksiz funksiyalari (o'zgarmas bo'lishi ham mumkin). Bu funksiyalar **tenglamaning koeffitsientlari** deyiladi, shu bilan birga $a_0(x) \neq 0$ (agar u 0 ga teng bo'lmasa tenglamaning hamma hadlarini unga bo'lishimiz mumkin).

$f(x)$ funksiya **ozod had** deyiladi.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (1.1)$$

tenglama n - tartibli **chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglama** deyiladi.

Agar $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (1.2)$$

tenglama n - tartibli **chiziqli bir jinsli tenglama** deyiladi.

⁴¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

2. Chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning xususiy yechimlari haqida teoremlar

Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko'pgina masalalarini yechish **ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar**ga keltiriladi. Quyida biz ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalarni qarab chiqamiz:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (2.1)$$

(2.1) tenglama (1.2) tenglamaning xususiy holidir. Quyida biz keltiradigan teoremlar n – tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar uchun ham o'rinli.

Ta'rif-2. Chiziqli erkli yechimlar yechimlarning fundamental sistemasi deyiladi.⁴²

Teorema-1. Agar y_1 funksiya ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda Cy_1 funksiya ham bu tenglamani yechimi bo'ladi.⁴³

Isboti. y_1 funksiya (2.1) ning yechimi, ya'ni

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0.$$

Endi Cy_1 ni (2.1) ga qo'yamiz:

$$Cy_1'' + a_1(x)Cy_1' + a_2(x)Cy_1 = C(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) = 0.$$

Bundan esa Cy_1 funksiya ham (2.1) ning yechimi ekani kelib chiqadi.

Teorema-2. Agar y_1 va y_2 funksiyalar ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda $y_1 + y_2$ funksiya ham bu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra, y_1 va y_2 funksiyalar (2.1)ning yechimlari,

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0 \text{ va } y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0.$$

Endi $y = y_1 + y_2$ funksiyani (2.1) tenglamaga qo'yamiz:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_2(x)(y_1 + y_2) = 0,$$

$$y_1'' + y_2'' + a_1(x)(y_1' + y_2') + a_2(x)(y_1 + y_2) = 0,$$

$$(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + (y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) = 0.$$

Demak, $y = y_1 + y_2$ funksiya (2.1) tenglamaning yechimi ekan.

⁴² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁴³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Natija. Agar y_1 va y_2 funksiyalar (2.1) tenglamaning xususiy yechimlari bo'lsa, u holda ularning chiziqli kombinatsiyasi $C_1y_1 + C_2y_2$ funksiya ham berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.⁴⁴

Agar n - tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ koeffitsientlari o'zgarmas son bo'lsa, u holda xususiy yechimlar $y = e^{kx}$ ko'rinishda izlanadi. Bu yerdagi k n - tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deb ataluvchi ushbu $k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_n = 0$ tenglamaning ildizlari bo'ladi.

Xarakteristik tenglama n ta $k_1, k_2, k_3, k_4, \dots, k_n$ ildizlarga ega. Bu ildizlarning xarakteriga ko'ra ularga mos xususiy yechimlar quyidagicha bo'ladi:

a) xarakteristik tenglamaning har bir haqiqiy sodd k ildiziga e^{kx} xususiy yechim mos keladi;

b) har bir m karrali haqiqiy ildizga m ta chiziqli erkli $e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \dots, x^{m-1}e^{kx}$ yechimlar mos keladi;

v) kompleks qo'shma sodd ildizlarning har bir $k_1 = \alpha + i\beta$ va $k_2 = \alpha - i\beta$ juftiga ikkita chiziqli erkli $e^{\alpha x} \cos \beta x$ va $e^{\alpha x} \sin \beta x$ xususiy yechim mos keladi;

g) karraligi r ga teng bo'lgan kompleks qo'shma ildizlarning har bir $k_1 = \alpha + i\beta$ $k_2 = \alpha - i\beta$ juftiga $2r$ ta ushbu chiziqli erkli xususiy yechimlar mos keladi;

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Olingan xususiy yechimlar-yechimlarning fundamental sistemasining chiziqli kombinatsiyasi

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \dots + C_ny_n$$

ni tuzib, o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi hosil qilinadi.

Misol-1. $y'' - 15y' + 26y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^2 - 15k + 26 = 0,$$

⁴⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

uning ildizlari $k_1 = 2$ va $k_1 = 13$ haqiqiy va oddiy, demak berilgan tenglamaning xususiy chiziqli erkli yechimlari (fundamental yechimlar sistemasi): $y_1 = e^{2x}$ va $y_1 = e^{13x}$; tenglamaning umumiy yechimi esa

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{13x}$$

bo'ladi.

Misol-2. $y^{IV} - 16y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^4 - 16 = 0,$$

uning ildizlari $k_1 = \pm 2$ haqiqiy va $k_1 = \pm 2i$ kompleks qo'shma ($\alpha = 0, \beta = 2$). Fundamental yechimlar sistemasini yozamiz:

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-2x}, y_3 = e^{0x} \cos 2x = \cos 2x, y_4 = e^{0x} \sin 2x = \sin 2x.$$

Tenglamaning umumiy yechimi esa

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

Misol-3. $y'' + 6y' + 9y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^2 + 6k + 9 = 0,$$

bu tenglama karrali ildizlarga ega ya'ni, $k_{1,2} = -3$. Bularga mos fundamental yechimlar sistemasi $y_1 = e^{-3x}, y_2 = xe^{-3x}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Demak tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

yoki

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-3x}.$$

3. Vronskiy determinanti

Ta’rif-3. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalardan istalgan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanmasa, ushbu funksiyalar sistemasiga **chiziqli erkli sistema** deyiladi.

Ta’rif-4. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalardan hech boimiganda biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalansa, ushbu funksiyalar sistemasiga **chiziqli bog‘liq sistema** deyiladi.

Ta’rif-5. $(n-1)$ marta differensiallanuvchi $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar sistemasining **Vronskiy determinanti** deb

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantga aytiladi.

Bu determinant x ning funksiyasi bo‘lib, $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ kabi belgilanadi. belgilanadi. Vronskiy determinanti funksiyalarning chiziqli bog‘liq yoki chiziqli erkli ekanini o‘rganish vositasi bo‘lib xizmat qiladi.⁴⁵

Teorema-3. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘lsa bu sistemaning Vronskiy determinanti funksiya aniqlangan barcha nuqtalarida aynan no‘lga teng bo‘ladi.

Teorema-4. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar chiziqli erkli va (1.2) chiziqli bir jinsli tenglamaning yechimlari bo‘lsa, u holda bu funksiyalarning Vronskiy determinanti tenglamaning koeffitsientlari aniqlangan sohaning hech bir nuqtasida nolga teng bo‘lmaydi.⁴⁶

4. Chiziqli bir jinsli differensial tenglama umumiy yechimi tuzilishi haqida

Ta’rif-5. n - tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning n ta chiziqli erkli yechimlari sistemasini uning **fundamental yechimlari sistemasi** deyiladi.⁴⁷

Teorema-5. n - tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning n ta yechimlari uning fundamental yechimlari sistemasini tashkil etishi uchun ularning Vronskiy determinanti noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarli.

⁴⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁴⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁴⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Yechimlarning fundamental sistemasi va Vronskiy determinant haqidagi teoremlardan foydalanib, qanday qilib chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimini xususiy yechimlardan tuzish mumkin degan savolga javob berish mumkin.

Teorema-6. Agar $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning yechimlarning fundamental sistemasi bo'lsa, u holda bu tenglamaning umumiy yechimi bu yechimlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

bu yerda $C_1, C_2, \dots, C_n$ lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.⁴⁸

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar deb nimaga aytiladi?
2. Yuqori tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
3. Yuqori tartibli bir jinslimas chiziqli differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Bir jinsli differensial tenglamaning yechimlari haqidagi teoremlarni ayting.
5. Chiziqli erkli va chiziqli bog'liq funksiyalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
6. Vronskiy determinanti va u haqidagi teoremlarni ayting.
7. Fundamental yechimlar sistemasi deb qanday yechimga aytiladi?
8. Umumiy yechim tuzilishi haqidagi teoremani ayting.

⁴⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

8-MA'RUZA O'ZGARMAS KOEFFITSIENTLI CHIZIQLI BIR JINSLIMAS DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. O'ZGARMASNI VARIATSIYALASH USULI

Reja:

1. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglama.
2. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish:
 - 1) xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va teng emas;
 - 2) xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va teng;
 - 3) xarakteristik tenglama ildizlari kompleks sonlar bo'lgan hollar.

Tayanch ibora va tushunchalar

O'zgarmas koeffitsientli, xarakteristik tenglamasi, o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi, xarakteristik tenglamaning ildizlari, fundamental yechimlar sistemasini topish.

1. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama⁴⁹

O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (8.1)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $p, q \in R$.

(1) ning umumiy yechimini topish uchun chiziqli erkli bo'lgan ikkita xususiy yechimini, ya'ni boshqacha aytganda fundamental yechimlar sistemasini topish kifoyadir.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (8.1) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (8.2)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo'ladi, bu erda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(8.1) ning ko'rinishi uning xususiy yechimlarini o'z hosilalariga teng bo'lgan funksiyalar orasidan izlash kerak ekanligini ko'rsatadi. Ma'lumki, elementar funksiyalar ichida ko'rsatkichli funksiya shunday xossaga ega.

1-misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

⁴⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Yechish. Bevosita qo'yish bilan tekshirib ko'rish mumkinki, $y_1(x) = e^x$ va $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli erkli yechimlar bo'ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (8.2) ga asosan, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi

Shuning uchun (8.1) ning xususiy yechimini

$$y = e^{kx} \quad (8.3)$$

ko'rinishda izlaymiz.

Bu holda (8.3) ni va uning $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ hosilalarini (8.1) ga qo'ysak

$$k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + q e^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx} (k^2 + p k + q) = 0. \quad (8.4)$$

(8.4) o'rinli bo'lishi uchun

$$k^2 + p k + q = 0 \quad (8.5)$$

bo'lishi kerak, chunki $e^{kx} \neq 0$. Bundan ko'rinadiki k (8.5) ning ildizi bo'lgan holda va faqat shu holdagina (8.3) funksiya (8.1) ning xususiy yechimi bo'ladi.

(8.5) algebraik tenglamaga (8.1) differensial tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

2. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish⁵⁰

Yuqoridan ma'lum bo'ldiki, o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli chiziqli (8.1) differensial tenglamaning umumiy yechimi uning xarakteristik tenglamasi yechimiga bog'liq

ekan. (8.5) xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$; $k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Bu yerda quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

⁵⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

1) k_1, k_2 – haqiqiy va har xil, $D = \frac{p^2}{4} - q > 0$

2) k_1, k_2 – haqiqiy va bir biriga teng(karrali), ya'ni $k_1 = k_2$, $D = 0$

3) k_1, k_2 – lar kompleks sonlar, $D < 0$

1) bu holda $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$ funksiyalar chiziqli erkli xususiy yechimlar bo'lib, fundamental yechimlarni taskil etadi. (8.1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (8.6)$$

bo'ladi.

2-misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad k_1 = 2; \quad k_2 = 3$$

bo'lib, umumiy yechim (8.6) formulaga asosan

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

bo'ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ va $y_1 = e^{k_1 x}$ bitta xususiy yechim bo'ladi. Ikkinchi xususiy echimni $y_2 = e^{k_2 x}$ ko'rinishda olaolmaymiz, chunki $e^{k_1 x} = e^{k_2 x}$.

Biz esa $y_1 = e^{k_1 x}$ xususiy yechim bilan chiziqli erkli bo'lgan ikkinchi xususiy yechimni topishimiz kerak. Shuning uchun ikkinchi xususiy yechimni

$$y_2 = u(x) e^{k_1 x} \quad (8.7)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda $u(x)$ - noma'lum funksiya. (8.7) dan hosilalar olsak,

$$y_2' = [u(x) + k_1 u(x)] e^{k_1 x}$$

$$y_2'' = [u(x) + 2k_1 u(x) + k_1^2 u(x)] e^{k_1 x}$$

Endi y_2, y_2', y_2'' larni (8.1) ga qo'ysak,

$$\left[u''(x) + (2k_1 + p)u'(x) + (k_1^2 + pk_1 + q)u(x) \right] e^{k_1 x} = 0$$

$e^{k_1 x} \neq 0$ bo'lgani uchun, $u''(x) + (2k_1 + p)u'(x) + (k_1^2 + pk_1 + q)u(x) = 0$ bo'lishi kerak.

$$2k_1 + p = 0, \text{ chunki } k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \Rightarrow 2k_1 = -p.$$

$k_1^2 + pk_1 + q = 0$, chunki k_1 - xarakteristik tenglamaning yechimi.

Demak $u''(x) = 0 \Rightarrow u'(x) = A \Rightarrow u(x) = Ax + B$. A va B lar ixtiyoriy o'zgarmaslar bo'lgani uchun $A=1, B=0$ desak $u(x) = x$ bo'ladi.

Demak, $y_2 = xe^{k_1 x}$ funksiya (8.1) tenglamaning ikkinchi xususiy yechimi bo'ladi, hamda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlar chiziqli erkli (tekshirib ko'ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} \quad (8.8)$$

umumiy yechim bo'ladi.

3-misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

bo'lib, ildizlari $k_1 = k_2 = -3$ bo'ladi (tenglamani yechib ko'rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o'zaro teng, (8.8) formulaga asosan, $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

3) k_1, k_2 -lar xarakteristik tenglamaning kompleks ildizlari bo'lsin. Bu holda

$$D = \frac{p^2}{4} - q < 0 \text{ bo'lib, } k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \alpha + i\beta; k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \alpha - i\beta \text{ bo'ladi.}$$

Bulardan $\alpha = -\frac{p}{2}$; $\beta = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ekanliklari ravshan.

Bu holda xususiy yechimlar $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$ va $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$ ko'rinishdagi haqiqiy argumentli kompleks funksiyalar bo'lib, bular (8.1) tenglamani qanoatlantirishi kerak. Bu ifodalarga

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

tengliklar hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{va} \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

funksiyalar ham (8.1) tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli (tekshirib ko'ring).

Demak,

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (8.9)$$

(8.1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

4-misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$k_1 = -3 + 2i$, $k_2 = -3 - 2i$ bo'ladi. Bu ildizlar kompleks qo'shma bo'lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha = -3$, $\beta = 2$ ekanligini hisobga olib (8.9) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

bo'ladi.

Endi ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya'ni Koshi masalasini qaraymiz.

5-misol. $y'' - y' - 2y = 0$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo'lganda $y = 8$, $y' = 7$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$k^2 - k - 2 = 0$$

bo'lib, $k_1 = -1$, $k_2 = 2$ uning ildizlari bo'ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

bo'lib, $x = 0$ bo'lganda $y = 8$, $y' = 7$ boshlang'ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'лади. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3$, $C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo'лади.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

- 1) $y'' + 3y' - 4y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 5y = 0$; 3) $y'' - y = 0$;
4) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0$; 6) $y'' - 2y' + 50y = 0$;
7) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 8) $y'' + 6y' = 0$.

2. $y'' + 10y' + 25y = 0$ tenglamaning $x = 1$ bo'lganda, $y = e^{-5}$, $y' = 3e^{-5}$ bo'ladigan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

Mustahkamlash uchun savollar

9. O'zgarmas koeffisientli bir jinsli chiziqli ikkinchi tartibli differensial tenglamalar
10. Xarakteristik tenglama nimadan iborat?
11. Xarakteristik tenglama ildizlariga qarab umumiy yechimni yozish mumkinmi?
12. Xarakteristik tenglama ildizlari kompleks qo'shma bo'lganda yechim qanday yoziladi?
13. Xarakteristik tenglama ildizlari karrali, haqiqiy va har xil bo'lganda umumiy yechim qanday yoziladi?

9-MA'RUZA O'NG TOMONI MAXSUS KO'RINISHDA BO'LGAN O'ZGARMAS KOFFITSIENTLI BIR JINSLIMAS CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING XUSUSIY YECHIMINI TOPISH. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASI

Reja:

1. O'ng tomoni maxsus ko'rinishdagi o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarni yechish.
2. O'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarni yechishning o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli.
3. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi.

Tayanch ibora va tushunchalar

O'zgarmas koeffitsientli bir jinsli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama, o'ng tomoni maxsus ko'rinishda, o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli, oddiy differensial tenglamalar sistemasi.

1. O'ng tomoni maxsus ko'rinishdagi ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarni yechish

Bizga

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = b(t) \quad (9.1)$$

ko'rinishdagi bir jinsli bo'lmagan n -inchi tartibli chiziqli differensial tenglama berilgan bo'lsin, bu erda $z = z(t)$ noma'lumlari haqiqiy yoki kompleks bo'ladigan skalyar funksiya, $a_1, \dots, a_n$ – o'zgarmas sonlar va $b(t)$ biror (r_1, r_2) oraliqda aniqlangan va uzluksiz funksiya.

$$z(t_0) = z_0, z'(t_0) = z'_0, \dots, z^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)} \quad (9.2)$$

tenglamaning boshlang'ich shartlari berilgan bo'lsin. Umumiy yechimini topish uchun quyidagi teoremani keltiramiz.

9.1-teorema. Agar $b(t)$ biror (r_1, r_2) oraliqda uzluksiz funksiya bo'lib va bir jinsli tenglamaning $z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = 0$, $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ fundamental yechimlar sistemasi malum bulsa, ya'ni $t_0 \in (r_1, r_2)$, u holda bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y(t) = \psi_0(t) + W^{-1}(0) \sum_{j=1}^n \psi_j(t) \int_{t_0}^t e^{a_1 s} b(s) W_j(s) ds \quad (9.3)$$

bu erda $\psi_0(t)$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi, va $j = 1, \dots, n, W_j(t) = \det W_j(t)$ iborat bo'ladi. $W_j(t)$ matritsa $W(t)$ matritsada j ustunni $(0, \dots, 0, 1)$ ustinga almashtirishdan hosil bo'lgan.⁵¹

Misol.

$$z'''' - 4z''' + 3z'' + 4z' - 4z = e^{3t}$$

$$f(x) = e^{3t}; \alpha = 3$$

$z'''' - 4z''' + 3z'' + 4z' - 4z = 0$ bir jinsli tenglamaning $y = e^{\lambda x}$ xususiy yechim desak va

xarakteristik tenglamaning $\rho^4 - 4\rho^3 + 3\rho^2 + 4\rho - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = -1$

ildizlari. Fundamental yechimlar sistemasi

$$\psi_1(t) = e^{2t}, \psi_2(t) = te^{2t}, \psi_3(t) = e^t, \psi_4(t) = e^{-t}$$

Bronskiy matritsasi

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & e^t & e^{-t} \\ 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} & e^t & -e^{-t} \\ 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} & e^t & e^{-t} \\ 8e^{2t} & (8t+12)e^{2t} & e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Faraz qilaylik, boshlang'ich shartlar $z(0) = 1, z'(0) = 2, z''(0) = 12$ va $z'''(0) = 30$. u holda bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\psi_0(t) = e^{2t} + 2te^{2t} - e^t + e^{-t}$$

Boshqa tomondan

$$W_1(s) = \det \begin{pmatrix} 0 & se^{2s} & e^s & e^{-s} \\ 0 & (2s+1)e^{2s} & e^s & -e^{-s} \\ 0 & (4s+4)e^{2s} & e^s & e^{-s} \\ 1 & (8s+12)e^{2s} & e^s & -e^{-s} \end{pmatrix} = 2e^{2s}(3s+4),$$

⁵¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$W_2(s) = \det \begin{pmatrix} e^{2s} & 0 & e^s & e^{-s} \\ 2e^{2s} & 0 & e^s & -e^{-s} \\ 4e^{2s} & 0 & e^s & e^{-s} \\ 8e^{2s} & 1 & e^s & -e^{-s} \end{pmatrix} = -6e^{2s},$$

$$W_3(s) = \begin{pmatrix} e^{2s} & se^{2s} & 0 & e^{-s} \\ 2e^{2s} & (2s+1)e^{2s} & 0 & -e^{-s} \\ 4e^{2s} & (4s+4)e^{2s} & 0 & e^{-s} \\ 8e^{2s} & (8s+12)e^{2s} & 1 & -e^{-s} \end{pmatrix} = -9e^{3s},$$

$$W_4(s) = \begin{pmatrix} e^{2s} & se^{2s} & e^s & 0 \\ 2e^{2s} & (2s+1)e^{2s} & e^s & 0 \\ 4e^{2s} & (4s+4)e^{2s} & e^s & 0 \\ 8e^{2s} & (8s+12)e^{2s} & e^s & 1 \end{pmatrix} = e^{5s}.$$

9.3 formuladan foyalanib umumiy yechimini topamiz.

$$\sum_{j=1}^4 \psi_j(t) \int_0^t e^{a_j s} b(s) W_j(s) ds = e^{2t} \int_0^t e^{-2s} 2e^{2s} (3s+4) ds + \\ + t \int_0^t e^{-2s} (-6e^{2s}) ds + e^t \int_0^t e^{-2s} (-9e^{2s}) ds + e^{-t} \int_0^t e^{-2s} e^{5s} ds = \left(-3t^2 + 8t - \frac{26}{3} \right) e^{2t} + 9e^t - \frac{1}{3} e^{-t}.$$

Agar

$$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -18.$$

Bundan quyidagi tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz

$$z(t) = e^{2t} + 2te^{2t} - e^t + e^{-t} + \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{13}{27} \right) e^{2t} - \frac{1}{2} e^t + \\ + \frac{1}{54} e^{-t} = e^{2t} + 2te^{2t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{55}{54}e^{-t} + \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{13}{27} \right) e^{2t}.$$

Noma'lum koeffitsientlar usuli⁵².

Bizga

⁵² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = b(t) \quad (9.1)$$

ko‘rinishdagi bir jinsli bo‘lmagan n -inchi tartibli chiziqli differensial tenglama berilgan bo‘lsin, $b(t)$ ba’zi bir chiziqli bir jinsli tenglamaning yechimi bo‘ladi va

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z = 0 \quad (9.4)$$

$$M(D) = D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_m, \quad (9.5)$$

ko‘rinishda yozsak,

$$M(D)b(t) = 0 \quad (9.6)$$

tenglama hosil bo‘ladi.

Agar
$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n$$

Belgilash kiritsak (9.1) tenglamaning ko‘rinishi

$$L(D)z = b(t) \quad (9.7)$$

(9.6) va (9.7) tenglamalarni birlashtirib, natijada quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$M(D)L(D)z = 0 \quad (9.8)$$

Agar $N(D) = M(D)L(D)$, ko‘rinishda yozsak, (9.8) tenglamamiz boshqa ko‘rinishda bo‘ladi.

$$N(D)z = 0. \quad (9.9)$$

Bu ko‘rinishdagi tenglama $r = n+m$ tartibli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli chiziqli differensial tenglama bo‘ladi. Agar mos bir jinsli tenglamaning $\chi_1(t), \dots, \chi_r(t)$ fundamental yechimlar sistemasi ma’lum bo‘lsa, u holda (9.9) tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘ladi.⁵³

$$y^* = \chi(t) = r/i = 1\beta_i \chi_i(t) \quad (9.10)$$

$\beta_1, \dots, \beta_n$ - ixtiyoriy konstantalar (9.7) va (9.10) tenglamalarni birlashtirilganda

$$L(D)\chi(t) = b(t) \quad (9.11)$$

tenglama hosil bo‘ldi. Agar

$$\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) L(D)z = 0 \text{ tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi bo'lsa,}$$

bundan ko‘rinib turibiki $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ bu sistema chiziqli bog‘lanmagan yechimlar sistemasi, ya’ni

$$\chi_i(t) = \varphi_i(t), i = 1, \dots, n \quad (9.12)$$

⁵³ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

biz xulosa chiqarishimiz mumkinki

Agar (9.10) bilan (9.11) ni birlashtirsak va (9.12)dan foydalanib yozsak

$$L(D)\varphi_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

biz quyidagi tenglamaning yechimni

$$b(t) = \sum_{i=1}^r \beta_i L(D)\chi_i(t) = \sum_{i=n+1}^r \beta_i L(D)\chi_i(t) \quad (9.13)$$

ko‘rinishda ifodalaymiz. Tenglamaning 2 tomonini tenglashtirsak $\beta_{n+1}, \dots, \beta_r$ koefitsientlarni

topsak bo‘ladi va bir jinsli tenglamaning $L(D)z = 0$ yechimi

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \chi_i(t)$$

ko‘rinishda bo‘ladi

Misol. Ushbu

$$z''' - z = e^{2t}(t^2 + 1)$$

tenglamaning yechimini toping. Berilgan tenglamani

$$L(D)z = e^{2t}(t^2 + 1)$$

Ko‘rinishda yozamiz, bu yerda

$$L(D) = D^2 - 1, \quad b(t) = e^{2t}(t^2 + 1)$$

Bir jinsli differensial tenglamaning ko‘rinishi

$$M(D)b(t) = 0$$

Bu yerda ,

$$M(D) = (D - 2)^3$$

Keltirilgan ta’riflardan foydalanib,

$$N(D)z = 0$$

Tenglamani yechamiz.

Bu yerda

$$N(D) = (D - 2)^3(D^2 - 1)$$

va

$$N(D)z = 0$$

Tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi ko‘rinishida bo‘ladi:

$$\chi_1(t) = e^t, \chi_2(t) = e^{-t}, \chi_3(t) = e^{2t}, \chi_4(t) = te^{2t}, \chi_5(t) = t^2e^{2t}.$$

Biroq,

$$\chi(t) = \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} + \beta_3 e^{2t} + \beta_4 te^{2t} + \beta_5 t^2 e^{2t}$$

Tenglamaning noma’lumlar qatnashgan umumiy yechimi ko‘rinishi.

Shunday qilib, noma’lum koefitsientlarni topamiz:

$$\begin{aligned} L(D)\chi(t) &= \beta L(D)e^{2t} + \beta_4 L(D)te^{2t} + \beta_5 L(D)t^2 e^{2t} = \\ &= (3\beta_5 t^2 + (8\beta_5 + 3\beta_4)t + (2\beta_5 + 4\beta_4 + 3\beta_3))e^{2t} \\ t^2 + 1 &= 3\beta_5 t^2 + (8\beta_5 + 3\beta_4)t + (2\beta_5 + 4\beta_4 + 3\beta_3) \end{aligned}$$

$$\beta_3 = \frac{35}{27}, \beta_4 = -\frac{8}{9}, \beta_5 = \frac{1}{3}$$

Natijada tenglamaning umumiy yechimi:

$$\chi(t) = \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} + e^{2t} \left(\frac{1}{3} t^2 + \frac{8}{9} t + \frac{35}{27} \right).$$

.

2. O'zgarmaslarni variatsiyalash usuli⁵⁴

Bizga

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

bir jinsli bo'lmagan tenglama berilgan bo'lsin va uning yechimini topish talab qilingan bo'lsin. (1) ning umumiy yechimini topish uchun $y'' + py' + qy = 0$ (2) tenglamaning umumiy yechimini $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ (3) ko'rinishda olamiz.

(1) ning umumiy yechimini ham (3) ko'rinishda izlaymiz. Lekin bu yerda C_1, C_2 larni o'zgarmaslar sifatida emas, x ning noma'lum funksiyasi $C_1(x), C_2(x)$ sifatida qaraymiz.

U holda (3) dan $y' = C_1 y_1' + C_1' y_1 + C_2 y_2' + C_2' y_2$ hosil bo'ladi.

Endi C_1, C_2 larni shunday tanlab olaylikki, natijada $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$ bo'lsin, u holda $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$ (4) $\Rightarrow y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1 + C_2' y_2'$ (5) hosil bo'ladi.

Endi (3), (4) va (5) larni (1) ga qo'ysak,

$$C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) + C_1' y_1 + C_2' y_2' = f(x)$$

birinchi va ikkinchi qavslar nolga teng, chunki y_1, y_2 lar (2) ning xususiy yechimlari. Demak

$$C_1' y_1 + C_2' y_2' = f(x) \quad (6)$$

Shunday qilib (3) (1) ning yechimi bo'ladi, agarda C_1, C_2 lar

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1 + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad (7)$$

sistemaning yechimi bo'lsa,

(7) dan tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli bo'lgani uchun, (7) dan C_1, C_2 larni aniqlash mumkin.⁵⁵

⁵⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx + \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2 \text{ - bu (1) ning umumiy yechimi.}$$

Ushbu

differensial tenglamalar sistemasini normal sistema deyiladi. Bu yerda $y_1, y_2, \dots, y_n$ lar erkin o'zgaruvchining noma'lum funksiyalari. Bu sistemani qanoatlantiruvchi $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ funksiyalar bu sistemaning yechimi deyiladi.

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, ..., C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} \quad (2)$$
$$x = x_0 \text{ da } y_1|_{x=x_0} = y_{10}, y_2|_{x=x_0} = y_{20}, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_{n0}. \quad (3)$$

Misol. $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y - z \end{cases}$ sistemasining $y|_{x=x_0} = 2$, $z|_{x=x_0} = 0$ boshlang'ich shartni

Yechish. Sistemaning birinchi tenglamasini differensiallaymiz:

⁵⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$y'' = y' + z'$$

z va z' ning ifodalarini sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yamiz :

$$z = y' - y, \quad z' = y'' - y', \quad y'' = y' + y - y' + y, \quad y'' - 2y = 0, \quad k^2 - 2 = 0, \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{2},$$

$$y = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{2}x}$$

$$z = y' - y = C_1 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot e^{\sqrt{2}x} - C_2 \cdot (\sqrt{2} + 1) \cdot e^{-\sqrt{2}x}.$$

Umumiy yechim $x = 0, \quad y = 2, \quad z = 0$ dan

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \cdot (\sqrt{2} - 1) - C_2 \cdot (\sqrt{2} + 1) = 0 \end{cases}, \quad C_1 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}.$$

$$\begin{cases} y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \cdot e^{\sqrt{2}x} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot e^{-\sqrt{2}x} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\sqrt{2}x} \end{cases} \quad \text{xususiy yechim.}$$

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

- 1) $2y'' + y' = x$; 2) $y'' + y' = \sin x$; 3) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$;
- 4) $y'' + y = 2x^2 + 1$; 5) $y'' - 2y' = xe^{-2x}$; 6) $y'' + 2y' + 2y = 3\sin x$;
- 7) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 8) $y'' - y' = e^x \cos 2x$;

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli bir jinssiz chiziqli differensial tenglamalarni yechimi haqidagi teorema qanday?
2. O'zgarmaslarni variatsiyalash usuli nima?
3. O'ng tomoni maxsus ko'rinishdagi o'zgarmas koeffitsientli bir jinssiz chiziqli differensial tenglamalarning qanday turlarini bilasiz?
4. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ bo'lgan holda xususiy yechim qanday ko'rinishda izlanadi?
5. $f(x) = [P_n(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sin \beta x]e^{\alpha x}$ bo'lgan holda xususiy yechim qanday ko'rinishda izlanadi?
6. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?

10- MA'RUZA Laplas almashtirishlari va xossalari. Operatsion hisobning asosiy teoremlari.

Reja:

1. Operatsion hisob va Laplas almashtirishi.
2. $\sigma_0(t)$, *sint*, *cost* funksiyalarning tasviri
3. Operatsion hisobning asosiy teoremlari.
4. Asosiy asl funksiyalar (originallar) va tasvirlar jadvali.

Tayanch ibora va tushunchalar

Operatsion hisob, Laplas almashtirishi, Laplas integrali, Laplas tasviri, asl va tasvir, o'sish ko'rsatkichi, Xevisayd birlik funksiyasi, o'xshashlik teoremasi, chiziqlilik xossasi, siljish teoremasi, kechikish teoremasi.

1. Operatsion hisob va Laplas almashtirishi

Operatsion hisob matematik analizning muhim qismlaridan biridir. Fizika, mexanika, elektrotexnika va boshqa fanlarga oid masalalarni yechishda operatsion hisob usulidan foydalaniladi. Operatsion hisob hozirgi zamon avtomatika va telemexanikasida, ayniqsa, keng qo'llaniladi. Operatsion hisobning asosiy tushunchalarini, oddiy differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechishning operatsion hisob usulini o'rganamiz.

Haqiqiy o'zgaruvchi t ning $t \geq 0$ qiymatlarida aniqlangan $f(t)$ funksiya berilgan bo'lsin. (Ba'zan $f(t)$ funksiya cheksiz interval $0 < t < +\infty$ da aniqlangan, lekin $t < 0$ da $f(t) = 0$ deb hisoblaymiz). $f(t)$ funksiya bo'lakli-uzluksiz, ya'ni istalgan chekli intervalda chekli sondagi birinchi tur uzilish nuqtalariga ega deb faraz qilamiz. Ba'zi integrallarning $0 \leq t < +\infty$ cheksiz intervalda mavjudligini ta'minlash uchun $f(t)$ funksiyaga qo'shimcha shartlar qo'yamiz. t ning $0 \leq t < +\infty$ intervaldagi har qanday qiymati uchun

$$|f(t)| < M e^{s_0 t} \quad (1)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan M va s_0 o'zgarmas musbat sonlar mavjud deb faraz qilamiz.

$f(t)$ funksiyaning haqiqiy o'zgaruvchi t ning kompleks funksiyasi e^{-pt} ga ko'paytmasini [bu yerda $p = a + bi$ ($a > 0$) biror kompleks son], ya'ni

$$e^{-pt} f(t) \quad (2)$$

ni qaraymiz. (2) funksiya ham haqiqiy o'zgaruvchi t ning kompleks funksiyasidir;

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t) e^{-ibt} =$$

$$= e^{-at} f(t) \cos bt - i e^{-at} f(t) \sin bt.$$

Bu tenglikni $t \in [0; +\infty)$ intervalda hadlab integrallaymiz:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \cos btdt - i \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \sin btdt \quad (3)$$

Agar $f(t)$ (1) shartni qanoatlantirsa va $a > s_0$ bo'lsa, (3) tenglikning o'ng qismida turgan integrallarning mavjudligini va integrallar absolyut yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz. Dastlab bu integrallardan birinchisini baholaymiz:

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \cos btdt \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-at} f(t) \cos bt| dt <$$

$$< M \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{s_0 t} dt = M \int_0^{+\infty} e^{-(a-s_0)t} dt = \frac{M}{a-s_0}.$$

Ikkinchi integral ham shu tariqa baholanadi. Demak,

$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ integral mavjud. Bu integral p ning biror funksiyasini ifodalaydi, u funksiyani $F(p)$ bilan belgilaymiz.

Ta'rif. Funksiyaning **Laplas almashtirishi** deb $p = a + bi$ ($a > 0, b$ — haqiqiy o'zgaruvchilar) kompleks o'zgaruvchining

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

formula bilan aniqlanadigan $F(p)$ funksiyasiga aytiladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi xosmas integralga **Laplas integrali** deyiladi.

Ta'rif. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $f(t)$ funksiyaga **original(asl)** deb ataladi:

a) $f(t)$ funksiya uzluksiz yoki chekli oraliqda chekli sondagi I tur uzilish nuqtalariga ega;

б) $t < 0$ да $f(t) = 0$;

в) $M > 0$ va $s_0 > 0$ o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib, $f(t) \leq M e^{s_0 t}$ o'rinli (s_0 — funksiyaning o'sish ko'rsatkichi).

Ta'rif.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (4)$$

almashtirishdagi $F(p)$ funksiya $f(t)$ funksiyaning *Laplas tasviri*, L - tasviri, yoki qisqacha, tasviri deb ataladi.

Agar $F(p)$ funksiya $f(t)$ funksiyaning tasviri bo'lsa, u quyidagicha yoziladi:

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t) \quad (5)$$

yoki

$$L\{f(t)\} = F(p) \quad (6)$$

Tasvirlarni kiritishning ma'nosi shundan iboratki, ularning yordami bilan ko'pgina masalalarning yechilishini soddalashtirish mumkin. Masalan, differensial tenglamalarni yechish tasvirni topish uchun bajariladigan juda sodda algebraik amallarga keltirilishi mumkin. Tasvirni bilgan holda original yo avval tuzilgan "original-tasvir" jadvalidan yoki quyida bayon qilingan usullar yordami topilishi mumkin.

Teorema(yagonalik teoremasi). Agar ikkita uzluksiz funksiya $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ bitta L -tasvir $F(p)$ ega bo'lsa, u funksiyalar aynan tengdir.

Bu teorema bundan buyon juda muhim rol o'ynaydi. Haqiqatdan ham, biz ilgari amaliy masalalarni yechishda biror usul bilan noma'lum funksiyaning tasvirini topib, so'ngra bu tasvir bo'yicha boshlang'ich funksiyaning topgan bo'lsak, endi aytilgan teoremaga asosan topilgan funksiya qo'yilgan masalaning yechimi ekanligini va boshqa yechimlari mavjud emas degan xulosaga kelimiz.

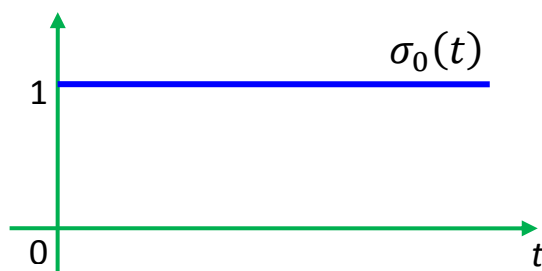
2. $\sigma_0(t)$, *sint*, *cost* funksiyalarning tasviri

1) $f(t)$ funksiya bunday aniqlangan:

$$t \geq 0 \text{ bo'lganda } f(t) = 1,$$

$$t < 0 \text{ bo'lganda } f(t) = 0.$$

$f(t)$ funksiya *Xevisaydning birlik funksiyasi* deb ataladi va $\sigma_0(t)$ bilan belgilanadi. Bu funksiyaning grafigi 1-rasmda ko'rsatilgan.



1-rasm

Xevisayd funksiyasining L –tasvirni topamiz:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$$

Demak, $\sigma_0(t) = 1 \longleftrightarrow \frac{1}{p}$ (7)

2) $f(t) = \sin t$ bo'lsin. U holda

$$L\{\sin t\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t dt = \frac{e^{-pt}(-p \sin t - \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Demak, $\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$ (8)

3) $f(t) = \cos t$ bo'lsin. U holda

$$L\{\cos t\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t dt = \frac{e^{-pt}(\sin t - p \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Demak, $\cos t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1}$ (9)

3. Operatsion hisobning asosiy teoremlari

O'xshashlik teoremasi. Agar $F(p) \longleftrightarrow f(t)$ bo'lsa,

$$\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right) \longleftrightarrow f(at) \quad (10)$$

bo'ladi.

Isbot. $f(at)$ funksiyalarning (bu yerda $a > 0$) tasvirini qaraymiz:

$$L\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at) dt.$$

Soʻngi integralda $z = at$, $dz = a \cdot dt$, $dt = \frac{dz}{a}$. U vaqtda quyidagini hosil qilamiz:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z) dz,$$

yoki

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Shunday qilib, agar

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$$

boʻlsa,

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \xrightarrow{\cdot} f(at)$$

boʻladi.

1-misol. $f(t) = \sin(at)$

Yechish. (10) formulaga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$\sin(at) \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

yoki

$$\sin(at) \xleftarrow{\cdot} \frac{a}{p^2 + a^2} \quad (11)$$

2-misol. $f(t) = \cos(at)$

Yechish. (10) formulaga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$\cos(at) \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

yoki

$$\cos(at) \xleftarrow{\cdot} \frac{p}{p^2 + a^2} \quad (12)$$

Teorema(tasvirning chiziqlilik xossasi). O'zgarmas sonlarga ko'paytirilgan bir necha funksiyalar yig'indisining tasviri shu funksiyalar tasvirlarining tegishli o'zgarmas sonlarga ko'paytmasining yig'indisiga teng, ya'ni agar

$$f(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t) \quad (13)$$

(C_i - o'garmas sonlar) va

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t) , \quad F_i(p) \xrightarrow{\cdot} f_i(t) ,$$

bo'lsa,

$$F(p) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(p) \quad (14)$$

bo'ladi.

3-misol. $f(t) = 3\sin 4t - 2\cos 5t$ funksiyaning tasviri topilsin.

Yechish. (11), (12) va (14) formulalarga asosan:

$$L\{f(t)\} = 3 \cdot \frac{4}{p^2 + 16} - 2 \cdot \frac{p}{p^2 + 25} = \frac{12}{p^2 + 16} - \frac{2p}{p^2 + 25} .$$

4-misol. Tasviri ushbu

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9}$$

formula bilan ifodalangan asl funksiya topilsin.

Yechish. $F(p)$ ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$F(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 2^2} + 20 \cdot \frac{p}{p^2 + 3^2}$$

(11), (12) va (14) formulalarga asosan:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t.$$

SILJISH TEOREMASI.

Teorema. Agar $F(p)$ funksiya $f(t)$ funksiyaning tasviri bo'lsa, $F(p + \alpha)$ funksiya $e^{-\alpha t} \cdot f(t)$ funksiyaning tasviridir, ya'ni

Agar $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$ bo'lsa,

$$F(p + \alpha) \xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} \cdot f(t) \quad (16)$$

bo'ladi. (Bu yerda $F(p + \alpha) > s_0$ deb faraz qilinadi.)

Isbot. $e^{-\alpha t} \cdot f(t)$ funksiyaning tasvirini topamiz:

Agar $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$ bo'lsa, u holda istalgan α da $F(p + \alpha) \xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} \cdot f(t)$

$$L\{e^{-\alpha t} \cdot f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt-\alpha t} \cdot f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} \cdot f(t) dt \xleftarrow{\cdot} F(p + \alpha)$$

Demak, original $e^{-\alpha t}$ ra ko'paytirilganda tasvirdagi p erkli o'zgaruvchi α ga siljishiga (so'nishga) olib kelar ekan.

Misol $f(t) = e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t)$. $\sin(\omega t) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t) = \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$.

Kechikish teoremasi.

Teorema. Agar $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$ bo'lsa u holda $\tau > 0$ bo'lganda

$$e^{-pt} \cdot F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t - \tau) \text{ bo'ladi.}$$

Isboti:

$$L\{f(t-\tau)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt-\alpha t} \cdot f(t-\tau) dt \left| \begin{matrix} t-\tau = z \\ t = \tau + z \\ dt = dz \end{matrix} \right| = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p(\tau+z)} \cdot f(z) dz =$$

$$= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-pz} \cdot f(z) dz = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^0 e^{-pz} \cdot f(z) dz + e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pz} \cdot f(z) dz$$

$$= e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

Misol: $f(t) = (t-1)^2$, $\left(t^2 \leftarrow \div \frac{2}{p^3}\right)$, $f(t-\tau) = (t-1)^2 \leftarrow \div \frac{2}{p^3} \cdot e^{-p\tau}$. ($\tau = 1$)

Asosiy asl funksiyalar(originallar) va tasvirlar jadvali

№	Asl	Tasvir	№	Asl	Tasvir
	$f(t)$	$F(p)$		$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	14	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	15	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$
3	t^2	$\frac{2}{p^3}$	16	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	17	$\cos a(t-t_0)$	$\frac{p \cdot e^{-pt_0}}{p^2 + a^2}$
5	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	18	$\sin a(t-t_0)$	$\frac{a \cdot e^{-pt_0}}{p^2 + a^2}$
6	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	19	$\int_0^t f(z) dz$	$\frac{1}{p} F(p)$
7	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	20	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} f(z) dz$
8	shat	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	21	$f(t-t_0)$	$e^{-pt_0} F(p)$

9	$chat$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	22	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
10	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	23	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cdot \cos at)$	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$
11	$t \sin at$	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	24	$tshat$	$\frac{2pa}{(p^2 - a^2)^2}$
12	$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	25	$tchat$	$\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$
13	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	26	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

13- MA'RUZA Asil tasvirini integrallash va differensiallash haqidagi teoremlar.

Reja:

5. Asl (original)ni differensiallash teoremasi.
6. Asl(original)ni integrallash haqidagi teorema
7. Tasvirni differensiallash va integrallash teoremlari
8. Asllar o'ramasi. Dyumel integrali
9. Tasvirga ko'ra aslni topish usullari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Aslni differensiallash, aslni integrallash, tasvirni differensiallash va integrallash, asllar o'ramasi, Dyumel integrali.

Asl (original)ni differensiallash teoremasi (Hosilaning tasviri).

Teorema. Agar $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$ bo'lsa, $pF(p) - f(0) \xrightarrow{\cdot} f'(t)$ bo'ladi.

Isboti. $f'(t)$ hosila uchun Laplas almashtirishini yozamiz:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt} \\ du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t) dt \\ v = f(t) \end{array} \right| =$$

$$= e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \cdot \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + pF(p),$$

$$f'(t) \xleftarrow{\cdot} pF(p) - f(0).$$

Bunga teoremani $(n - 1)$ marta tatbiq etamiz:

$$f^{(n)}(t) \xleftarrow{\cdot} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) + \dots + f^{(n-1)}(0).$$

Xususiyl holda, $f(0) = 0$ bo'lsa, $f^{(n)}(t) \xleftarrow{\cdot} p^n F(p)$ bo'ladi.

Asl(original)ni integrallash haqidagi teorema.

Teorema. Agar $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)$ bo'lsa, u holda $\int_0^t f(t) dt \xleftarrow{\cdot} \frac{F(p)}{p}$.

Isboti. $\int_0^t f(t) dt \xleftarrow{\cdot} G(p)$ belgilab, originalni differensiallash teoremasini tatbiq etamiz.

$$\left(\int_0^t f(t) dt \right)' = pG(p) - \int_0^0 f(t) dt, \quad f(t) \leftarrow \frac{1}{p} G(p) = F(p), \quad G(p) = \frac{1}{p} F(p),$$

$$\int_0^t f(t) dt \leftarrow G(p) = \frac{1}{p} F(p), \quad \int_0^t f(t) dt \leftarrow \frac{1}{p} F(p)$$

Tasvirni differensiallash teoremasi.

Agar $L\{f(t)\} = F(p)$ bo'lsa, u holda $L\{-t f(t)\} = F'(p)$ bo'ladi.

Tasvirni integrallash teoremasi

Agar

$$f(t) \leftarrow F(p) \text{ va } \int_p^\infty F(z) dz \text{ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda } \frac{f(t)}{t} \leftarrow \int_p^\infty F(p) dp$$

Misol: $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ originalning tasvirini toping.

$$\frac{\sin t}{t} \leftarrow \int_0^\infty \frac{1}{z^2 + 1} dz = -\arctg z \Big|_p^\infty = -\frac{\pi}{2} + \arctg p = \arctg \frac{1}{p}$$

$$\frac{\sin t}{t} \leftarrow \arctg \frac{1}{p} \text{ (jadvalga kiriting)}$$

O'tilganlarni jamlasak:

1. Chiziqlilik xossasi.

$$f(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t) \leftarrow F(p) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(p)$$

2. O'xshashlik teoremasi.

$$f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

3. Kechikish teoremasi. $f(t - \tau) \leftarrow e^{-p\tau} F(p)$

4. Siljish teoremasi. $e^{-\alpha t} \cdot f(t) \leftarrow F(p + \alpha)$

5. Aslni differensiallash teoremasi.

$$f^{(n)}(t) \leftarrow \frac{\cdot}{\cdot} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

6. Aslni integrallash teoremasi $\int_0^t f(t) dt \leftarrow \frac{\cdot}{\cdot} \frac{1}{p} F(p)$.

7. Tasvirni differensiallash teoremasi $tf(t) \leftarrow \frac{\cdot}{\cdot} F'(p)$.

8. Tasvirni integrallash teoremasi $\frac{f(t)}{t} \leftarrow \frac{\cdot}{\cdot} \int_0^\infty F(z) dz$.

Originallar o'ramasi. Dyamel integrali

Ta'rif: Ikkita $f(t)$ va $\varphi(t)$ funksiyalarning o'ramasi $f(t) * \varphi(t)$ ko'rinishda belgilanib

$$f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t - \tau) d\tau$$

ko'rinishdagi integralga aytiladi.

Asllar o'ramasi kommutativlik xossaga ega.

$$f(t) * \varphi(t) = \varphi(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t - \tau) d\tau = \int_0^t \varphi(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau.$$

Arap $f(t) \leftarrow \frac{\cdot}{\cdot} F(p)$, $\varphi(t) \leftarrow \frac{\cdot}{\cdot} \Phi(p)$ bo'lsa,

$$f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(t) \cdot \varphi(t - \tau) d\tau \leftarrow \frac{\cdot}{\cdot} F(p) \cdot \Phi(p)$$

o'rinli bo'ladi.

Demak, asllar o'ramasi tasvirlar ko'paytmasiga teng.

Dyamel formulasi (integrali).

$f(t)$ $[0; +\infty)$ da uzluksiz original bo'lsin. $\varphi(t)$ $[0; +\infty)$ da uzluksiz va shu bilan birga $\varphi'(t)$ ham original bo'lsin. $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$ va $\varphi(t) \xrightarrow{\cdot} \hat{O}(p)$ uchun

$\int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\cdot} F(p) \cdot \hat{O}(p)$ Chap tomondagi integralni differensiallaymiz.

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi'(t-\tau) d\tau + f(t) \cdot \varphi(0)$$

$$f(t) \cdot \varphi(0) + \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi'(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\cdot} pF(p) \cdot \Phi(p) \quad \text{Dyuamel formulasi.}$$

Agar $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$, $\varphi(t) \xrightarrow{\cdot} \Phi(p)$ bo'lsa, quydagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$pF(p) \cdot \Phi(p) = f(0) \cdot \varphi(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot \varphi(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

$$pF(p) \cdot \Phi(p) = f(0) \cdot \varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) \cdot f'(t-\tau) d\tau \quad (2)$$

$$pF(p) \cdot \Phi(p) = \varphi(t) \cdot f(0) + \int_0^t \varphi'(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

$$pF(p) \cdot \Phi(p) \xrightarrow{\cdot} \varphi(t) \cdot f(0) + \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi'(t-\tau) d\tau \quad (4)$$

1 – misol. $f(t) = e^t$ va $\varphi(t) = t$ funksiyalarning o'ramasini toping.

$$\begin{aligned} f \cdot \varphi &= \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^\tau \cdot (t-\tau) d\tau \left| \begin{array}{l} u = t-\tau, \quad du = -d\tau \\ dv = e^\tau d\tau, \quad v = e^\tau \end{array} \right| = e^\tau (t-\tau) \Big|_0^t + \int_0^t e^\tau d\tau = \\ &= -t + e^\tau \Big|_0^t = -t + e^t - 1. \end{aligned}$$

Demak, $e^t \cdot t = e^t - t - 1$

2 – misol. $F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$ funksiya originalini o'ramasi haqidagi

teoremdan foydalanib toping.

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = F_1(p) \cdot F_2(p),$$

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\cdot} \cos(\omega t) = f(t),$$

$$F_2(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\cdot} \sin(\omega t) = \varphi(t),$$

$$\begin{aligned} F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p) &= \xrightarrow{\cdot} f(t) \cdot \varphi(t) = \int_0^t \sin \omega \tau \cdot \cos \omega(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\sin \omega t + \sin(2\omega t - \omega \tau)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\tau \cdot \sin \omega t - \frac{1}{2\omega} \cdot \cos(2\omega \tau - \omega t) \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sin \omega t - \frac{1}{2\omega} \cdot [\cos \omega t - \cos(-\omega t)] = \frac{t \cdot \sin \omega t}{2}. \end{aligned}$$

$$F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{2} \cdot (t \cdot \cos t + \sin t)$$

3-мисол. Berilgan tasvirlarga ko'ra asllarni toping.

$$1). F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4},$$

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{20}, \quad D = -\frac{1}{5}$$

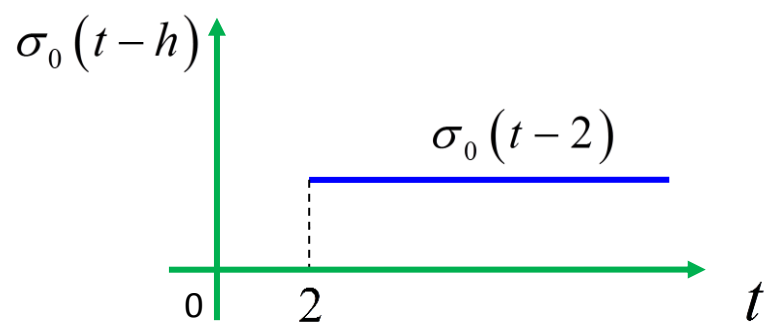
$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \cdot \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot \frac{2}{p^2+2^2}.$$

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20} \cdot \cos 2t - \frac{1}{10} \cdot \sin 2t$$

$$2). F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+2)}$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2+4p+9} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(p+2)^2 + (\sqrt{5})^2} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-2t} \sin \sqrt{5}t$$

$$3). F(p) = \frac{pe^{-2p}}{p^2+3^2} \xrightarrow{\cdot} \cos 3(t-2) \cdot \eta(t-2)$$



Mustaqil bajarish uchun misollar

1. Quyidagi asl funksiyalarning tasvirlarini toping.

1) $f(t) = 2e^{3t} + 3t + 1$

2) $f(t) = te^{3t} + 2 \cos 3t$

3) $f(t) = \int_0^t \sin t dt$

4) $f(t) = \sin^2 t$

2. Quyidagi tasvirlarning originallarini toping

1) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2-4}$, 2) $F(p) = e^t \cdot \frac{3p+2}{p^2+4}$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Aslni differensiallash teoremasini ayting.
2. Aslni integrallash formulasi qanday?
3. Tasvirni differensiallash va integrallash deganda nimani tushunasiz?
4. Asllar o'ramasi deb nimaga aytiladi?
5. Dyamel integrali qanday?

12- MA'RUZA O'zgaras koeffitsientli diffirensial tenglama va tenglamalar sistemasini yechishning operatsion usuli.

Reja:

10. O'zgaras koeffitsientli chiziqli differensial tenglamani yechishning operatsion hisob usuli.
11. O'zgaras koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini yechishning operatsion hisob usuli.

Tayanch ibora va tushunchalar

Differensial tenglamani yechishning operatsion hisob usuli, differensial tenglamalar sistemasini yechishning operatsion hisob usuli, tasvirllovchi tenglama, noma'lum funksiya tasviri.

1. O'zgaras koeffitsientli chiziqli differensial tenglamani yechishning operatsion hisob usuli.

Quyidagi chiziqli differensial tenglamani ko'ramiz.

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t) \quad (1)$$

Bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ berilgan haqiqiy sonlar. $f(t)$ - ma'lum funksiya.

$x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x(t)$ va $f(t)$ funksiyalar originallar bo'lsin. Quyidagi **Koshi** masalasini yechishni qaraymiz:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (2)$$

bu yerda $x_0, x'_0, x''_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ lar berilgan sonlar.

$x(t) \leftarrow \dot{\text{---}} X(p)$ va $f(t) \leftarrow \dot{\text{---}} F(p)$ bo'lsin. Originalni differensiallash teoremasiga ko'ra va (2) shartlarga asosan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$x'(t) \leftarrow \dot{\text{---}} p \cdot X(p) - x_0, \quad x''(t) \leftarrow \dot{\text{---}} p^2 \cdot X(p) - p \cdot x_0 - x'_0$$

$$x^{(n)}(t) \leftarrow \dot{\text{---}} p^n \cdot X(p) - p^{n-1} \cdot x_0 - p^{n-2} \cdot x'_0 - \dots - x_0^{(n-1)}$$

bularni (1) - tenglamaga qo'yib:

$$p^n \cdot X(p) - p^{n-1} \cdot x_0 - p^{n-2} \cdot x'_0 - \dots - x_0^{(n-1)} + \\ + a_1 \cdot (\dots) + \dots + a_{n-1} \cdot (pX(p) - x_0) + a_n \cdot X(p) = F(p)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu (1) tenglamaning tasvirlovchi tenglamasi yoki **yordamchi tenglama** deyiladi. Bu $X(p)$ ga nisbatan 1 – darajali tenglamadir. Uni ixchamlab bunday yozamiz:

$$Q_n(p) \cdot X(p) = F(p) + R_{n-1}(p) \quad (3)$$

$Q_n(p)$ – n -darajali ko‘phad, $R_{n-1}(p)$ – $(n-1)$ -darajali ko‘phad.

$$Q_n(p) = p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n$$

(1) tenglamaning **xarakteristik tenglamasi** deyiladi. $R_{n-1}(p)$ -boshlang‘ich shartlarga bog‘liq ko‘phad. (3) tenglikdan

$$X(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)} \quad (4)$$

Bu tasvirdan uning $x(t)$ aslini topsak, chiziqli differensial tenglamaning berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradigan yechimini topgan bo‘lamiz.

1-misol. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1$

Yechish. Tasvirga o‘tamiz, noma’lum funksiya tasviri $F(p)$ bo‘lsin.

$$x(t) \leftarrow \frac{1}{p+1} F(p), \quad x'(t) \leftarrow \frac{1}{p+1} p \cdot F(p) - x(0) = \frac{1}{p+1} p \cdot F(p) - 1, \quad e^{-t} \leftarrow \frac{1}{p+1}.$$

Topilganlarni berilgan tenglamaga qo‘yamiz,

$$pF(p) - 1 + F(p) = \frac{1}{p+1}, \quad (p+1)F(p) = \frac{1}{p+1} + 1 = \frac{p+2}{p+1}.$$

Tasvirdan originalga o‘tib, Koshi masalasining yechimini topamiz:

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} \rightarrow f(t) = e^{-t} + t \cdot e^{-t} = (1+t) \cdot e^{-t}.$$

2-misol. $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

Yechish. Tasvirga o‘tamiz, noma’lum funksiya tasviri $X(p)$ bo‘lsin,

$$x(t) \leftarrow X(p), \quad x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \leftarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p), \quad e^{2t} \leftarrow \frac{1}{p-2}.$$

Berilgan tenglamaga tasvirlarni qo‘yib, orignalga qaytamiz,

$$p^2 X(p) - 2pX(p) = \frac{1}{p-2}$$

$$X(p) = \frac{1}{p(p-2)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-2} + \frac{2}{(p-2)^2} \right),$$

$$x(t) = \frac{1}{4} (1 - e^{2t} + 2te^{2t})$$

Koshi masalasining yechimini hosil qilamiz.

2. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini yechishning operatsion hisob usuli

O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechishda ham yuqoridagi kabi tenglamalar sistemasining tasviri topib olinadi. Noma'lum funksiyalarning tasvirlariga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu tenglamalar sistemasi yechiladi va yana noma'lum funksiyalarning tasvirlaridan asl funksiyalarga o'tiladi. Topilgan asl funksiyalar Koshi masalasining yechimi bo'ladi.

$$\text{3-misol. } \begin{cases} x' + y = 0 \\ y' + x = 0 \end{cases} \quad x(0)=1, \quad y(0)=-1$$

$$x(t)=e^t, \quad y(t)=-e^t.$$

$$\text{4-misol. } \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t \\ x'' + 2y' + x = 0 \end{cases} \quad x(0)=y(0)=x'(0)=0$$

$$x(t)=2(1-e^{-t}+e^{-t}), \quad y(t)=2-t+2e^{-t}-2te^{-t}$$

Mustaqil bajarish uchun misollar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping.

$$1) \quad x''' + x' = \sin t, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=1, \quad x''(0)=0$$

$$2) \quad x'' - 9x' = e^{-2t}, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$$

$$3) \quad x'' - 4x = t - 1, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$$

2. Quyidagi differensial tenglamalar sistemasining berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

$$1) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

$$2) \begin{cases} x' + 4x - y = 0, \\ y' + 2x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 2 \quad y = 2$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Differensial tenglama operatsion hisob qanday tatbiq etiladi?
2. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun operatsion hisob qanday tatbiq etiladi?

13- MA'RUZA SONLI QATORLAR, QATORNING YAQINLASHISHI VA UZOQLASHISHI. GEOMETRIK QATOR. YAQINLASHUVCHI QATORNING XOSSALARI. QATOR YAQINLASHISHINING ZARURIY SHARTI. GARMONIK QATOR

Reja:

1. Sonli qatorlar haqida tushunchalar.
2. Geometrik qator.
3. Sonli qatorlarning ba'zi xossalari.
4. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.

Tayanch ibora va tushunchalar

Sonli qator, cheksiz yig'indi, umumiy had, qator yig'indisi, xususiy yig'indi, yaqinlashuvchi qator, uzoqlashuvchi qator, geometrik qator, yaqinlashishning zaruriy sharti, Mengoli qatori .

1. Sonli qatorlar haqida tushunchalar. Sonli qator, ya'ni “sonlarning cheksiz yig'indisi” tushunchasini kiritish uchun geometriyadan eng sodda holatni tekshirib chiqamiz.

Uzunligi $l=2$ kesmani qaraymiz(1.1-shakl). O'rtasidagi nuqta uni ikkita uzunligi

$a_0 = \frac{l}{2} = 1$ bo'lgan kesmaga ajratadi. Kesmaning chap qismini qoldirib, o'ng qismini

uzunligi $a_1 = \frac{l}{4} = \frac{1}{2}$ bo'lgan ikki qismga bo'lamiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, bir

kesmani bir nechta uzunliklari $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ bo'lgan qism kesmalarning birlashmasi deb

qarash mumkin bo'ladi. Mos holda, berilgan kesmaning uzunligi qism kesmalarning uzunliklari yig'indisiga teng:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad (13.1)$$

Tenglikning o'ng tarafida hadlarning cheksiz yig'indisini hosil qildik. Bu cheksiz yig'indi ketma-ketlik yordamida, sonli qator tushunchasiga keltiriladi.

Berilgan $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ketma-ketlikning **xususiy yig'indilari ketma-ketligi** $\{s_n\}_{n \geq 0}$ ni hosil qilamiz:

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

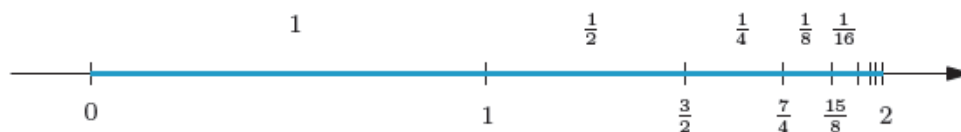
va umumiy holda,

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k .$$

Quyidagi belgilash kiritamiz

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ belgi **sonli qator** deb ataladi. a_k esa qatorning **umumiy hadi** deyiladi.



1.1-shakl.

Ta'rif 13.1. $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ketma-ketlik va $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ berilgan bo'lsin. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ limitni qaraylik.

1) Agar limit (chekli yoki cheksiz) mavjud bo'lsa, uning qiymati s qatorning yig'indisi

$$\text{deyiladi: } \sum_{k=0}^{\infty} a_k = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Agar s chekli bo'lsa, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **qator yaqinlashuvchi** bo'ladi.

Agar s cheksiz bo'lsa, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **qator uzoqlashuvchi** bo'ladi.

2) Agar limit cheksiz bo'lsa, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **qator noaniq** bo'ladi.⁵⁷

1- misol. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, $k \geq 0$. Uning xususiy yig'indilari ketma-ketligi

$$s_0 = 1, s_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \dots$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Agar $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + ab^{n-1} + \dots + a^{n-1}b + b^n)$ ekanini e'tiborga olsak, va $a = 1$, $b = x$ deb olsak

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \quad (13.2)$$

Bundan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2 - \frac{1}{2^n},$$

shunday qilib,

⁵⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) = 2.$$

Berilgan qator yaqinlashuvchi va yig'indisi 2 ga teng, (13.1) tenglik o'rinli ekanligi isbot bo'ldi.

2- misol. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ qatorning xususiy yig'indilari ketma-ketligi

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & s_1 &= 1 - 1 = 0, \\ s_2 &= s_1 + 1 = 1, & s_3 &= s_2 - 1 = 0, \\ &\dots & & \\ s_{2n} &= 1, & s_{2n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Juft indeksli hadlari 1ga, toq indeksli hadlari esa 0ga teng. Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ mavjud emas va qator noaniq.

2. Geometrik qator. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, bu yerda $q \in R$ bo'lib, yuqoridagi ikkita misol

geometrik qator deb ataluvchi berilgan qatorning xususiy hollari hisoblanadi. Geometrik qator o'ta muhimdir.⁵⁸

Agar $q = 1$ bo'lsa, u holda $s_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$ bo'ladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, natijada qator uzoqlashuvchi ekan.

Agar $q \neq 1$ bo'lsa, (13.2) dan

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Bundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} 1/(1 - q), & \text{agar } q < 1 \text{ bo'lsa} \\ +\infty, & \text{agar } q > 1 \text{ bo'lsa} \\ \text{mavjud emas,} & \text{agar } q \leq -1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Natijada,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} 1/(1 - q), & \text{agar } |q| < 1 \text{ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi} \\ +\infty, & \text{agar } q \geq 1 \text{ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi} \\ \text{mavjud emas,} & \text{agar } q \leq -1 \text{ bo'lsa, qator noaniq.} \end{cases}$$

3. Sonli qatorlarning ba'zi xossalari. Ko'pincha $\{a_k\}$ ketma-ketlik $k \geq k_0$ uchun aniqlangan bo'ladi, bu holda quyidagi 13.1-ta'rifni quyidagi xossa yordamida tahrirlash mumkin.

Xossa 13.2. Qatorning holati undan chekli sondagi hadlarini tashlashdan yoki unga chekli sondagi hadlarni qo'shishdan o'zgarmaydi.⁵⁹

3- misol. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$, Mengoli qatori deb ataluvchi qator.

⁵⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁵⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$a_k = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

bo'lgani uchun

$$s_2 = a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$s_3 = a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

va umumiyasi

$$s_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Shunday qilib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Berilgan qator yaqinlashuvchi va yig'indi 1 ga teng.

4- misol. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ qator uchun

$$a_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k,$$

bundan

$$s_1 = a_1 = \ln 2, \quad s_2 = a_1 + a_2 = \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) = \ln 3,$$

...

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1).$$

Shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Xossa 13.3. Agar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ qator yaqinlashuvchi(uzoqlashuvchi) bo'lib, yig'indisi S bo'lsa, u holda $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k$ qator ham yaqinlashuvchi(uzoqlashuvchi) bo'lib, yig'indisi λS bo'ladi ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$).⁶⁰

Isboti. ► $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ qator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (chekli yoki cheksiz) mavjud.

$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k$ qatorning n -xususiy yig'indisi

$$\lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n$$

⁶⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

bo'lib, limiti esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lambda S$$

bundan $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k$ qatorning yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) ekanligi kelib chiqadi. ◀

Xossa 13.4. Agar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ va $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indilari mos ravishda S' va S'' bo'lsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi $S = S' + S''$ bo'ladi.⁶¹

4. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti. Garmonik qator. Qator yaqinlashuvchiligidan sodda, lekin o'ta zarur sharti bilan tanishamiz.

Teorema 13.5. Agar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

bo'ladi.

Isboti. ▶ Teorema shartidan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ mavjud.

$$13.2\text{-} \text{ xossaga ko'ra, } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

U holda,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k - S_{k-1}) = S - S = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Qatorning umumiy hadi $k \rightarrow \infty$ da nolga intilsa, qatorning albatta yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqmaydi. Misol sifatida 4-misolda ko'rilgan $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ uzoqlashuvchi

qatorni ko'rishimiz mumkin, Bu qatorda $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = 0$ bo'ladi.

Natija. Agar qatorning umumiy hadi $k \rightarrow \infty$ da nolga intilmasa, u holda qator, albatta, uzoqlashuvchi bo'ladi.⁶²

5- misol. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k} \right)^k$ qator uzoqlashuvchi, chunki uning $a_k = \left(1 - \frac{1}{k} \right)^k$ umumiy

hadining $k \rightarrow \infty$ dagi limiti $e^{-1} \neq 0$ bo'ladi.

Agar qator yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi S bo'lsa,

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

qatorning n – qoldig'i deyiladi.

Quyida qator yaqinlashishining yana bir zaruriy sharti bilan tanishamiz.

⁶¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁶² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Teorema 13.6. Agar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ bo'ladi.⁶³

Isboti. ► $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0$. ◀

Nazorat uchun savollar

1. Sonli qator deb nimaga aytiladi?
2. Qatorning umumiy hadi nima?
3. Geometrik qator deb qanday qatorga aytiladi?
4. Qatorning xususiy yig'indisi nima?
5. Qatorning yig'indisi qanday aniqlanadi?
6. Qanday qatorga yaqinlashuvchi deyiladi?
7. Qanday qator uzoqlashuvchi bo'ladi?
8. Qanday qator noaniq qator deyiladi?
9. Yaqinlashuvchi qatorlar qanday xossalarga ega?
10. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti nima?
11. Qatorning n – qoldig'i deb nimaga aytiladi?

⁶³ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

14- MA'RUZA QATOR YAQINLASHISHINING YETARLI ALOMATLARI. TAQQOSLASH ALOMATI. DALAMBER ALOMATI. KOSHINING RADIKAL ALOMATI. KOSHINING INTEGRAL ALOMATI

Reja:

1. Musbat hadli qator. Taqqoslash alomatlari.
2. Dalamber alomati.
3. Koshi alomati.
4. Qator yaqinlashishining integral alomati.

Tayanch ibora va tushunchalar

Musbat hadli qator, taqqoslash alomatlari, garmonik qator, umumlashgan taqqoslash alomati. Dalamber alomati, .Koshi alomati, integral alomati, qator qoldig'ini integral alomati yordamida baholash.

1. Musbat hadli qator. Taqqoslash alomatlari. Barcha hadlari musbat bo'lgan qator *musbat hadli qator* deyiladi, ya'ni $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0, \forall k \geq 0$.

Teorema 14.1. Agar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ qator musbat hadli bo'lsa, u holda u yo yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.⁶⁴

Isboti. ► Berilgan qatorning xususiy yig'indilari monoton o'suvchi, chunki

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Monoton ketma-ketliklarning limitining mavjudligi haqidagi teorema ko'ra, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ limit mavjud va u chekli yoki cheksiz. ◀

Teorema 14.2. (Taqqoslash alomati). $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ va $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ musbat hadli qatorlar bo'lib, $\forall k \geq 0$ uchun $0 \leq a_k \leq b_k$ bo'lsin.

⁶⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

1) Agar $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ham yaqinlashuvchi va

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

2) Agar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.⁶⁵

1-misol. $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{k \cdot 2^k} + \dots$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots$$

qator bilan taqqoslayimz. Ma'lumki, keyingi qator geometrik qator bo'lib, yaqinlashuvchidir. Hamma k lar uchun

$$\frac{1}{k \cdot 2^k} \leq \frac{1}{2^k}$$

tengsizliklar bajariladi, demak taqqoslash alomatiga ko'ra, berilgan qatorning ham yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2-misol. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ garmonik qator deb ataluvchi qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x > -1$ tengsizlikdan foydalansak,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1,$$

tengsizlik kelib chiqadi. Lekin $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ qator uzoqlashuvchi (13-ma'ruza, 2-misol), bundan garmonik qator ham uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

⁶⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Teorema 14.3. (Umumlashgan taqqoslash alomati). $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ va $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ musbat hadli qatorlar uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = l \quad (0 < l < \infty)$$

bo'lsa, har ikki qator bir paytda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.⁶⁶

2. Dalamber alomati.

Teorema 14.4. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$, $\forall k \geq 0$ qator uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$ (chekli yoki cheksiz) limit bo'lsin. Agar $l < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi, agar $l > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.⁶⁷

Eslatma: 1) Agar $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ bo'lsa, qatorni boshqa alomatlar yordamida yaqinlashishga tekshiriladi.

2) Dalamber alomatidan qatorning umumiy hadida ko'rsatkichli funksiya yoki faktorial qatnashganda foydalanish qulay.

3-misol. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1.$

Demak, Dalamber alomatiga ko'ra, berilgan qator yaqinlashuvchi.

4-misol. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{k}{2k-1} + \dots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish.

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{2k+1} : \frac{k}{2k-1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(2k-1)}{(2k+1)k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^2 + k - 1}{2k^2 + k} = \frac{2}{2} = 1$$

Bu holda Dalamber alomati savolga javob bermaydi. Berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiraylik,

⁶⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁶⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, demak, berilgan qator uzoqlashuvchi

3. Koshi alomati

Teorema 14.5. Musbat hadli qator $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0, \forall k \geq 0$ uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = l \text{ (chekli yoki cheksiz)}$$

limit mavjud bo'lsin. Agar $l < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi, agar $l > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.⁶⁸

5-misol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \dots + \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k + \dots \text{ qator}$$

yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Koshi alomatidan $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{2k+1} \right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1.$

Shunday qilib, berilgan qator Koshi alomatiga asosan yaqinlashuvchibo'ladi.

4. Qator yaqinlashishining integral alomati.

Teorema 14.6. Agar $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ qatorning hadlari musbat va kamayuvchi bo'lsa

va $f(x)$ uzluksiz funksiya uchun $f(k) = u_k, k \geq 1$ tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral va $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ qator bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.⁶⁹

6-misol. *Umumlashgan garmonik qator.* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ qatorga umumlashgan garmonik qator(ba'zi adabiyotlarda Dirixle qatori) deyiladi.

⁶⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁶⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx$$

Bu qator $p > 1$ da yaqinlashuvchi, $p \leq 1$ da uzoqlashuvchi.

masalan 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchi, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ uzoqlashuvchi.

Qator qoldig'ini va yig'indisini integral alomati yordamida baholashga imkon beradigan quyidagi tasdiq o'rinli.

Teorema 14.7. Agar musbat hadli $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ qator integral alomatining talablariga javob bersa va yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq r_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx \quad \text{va}$$

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq s \leq s_n + \int_n^{\infty} f(x) dx$$

tengsizliklar o'rinli.

7-misol.

$$S = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots \left(f(x) = \frac{1}{x^3} \right)$$

$\varepsilon = 0.1$ gacha aniqlikda toping.

Yechish. $r_n \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}, \quad r_n < \varepsilon, \quad \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{10} = \varepsilon$

$$n > \sqrt{5} \approx 2.24; \quad n = 3 \Rightarrow S_3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \approx 1.16.$$

Nazorat uchun savollar

1. Musbat hadli qator deb nimaga aytiladi?
2. Musbat hadli qator yaqinlashishining qanday alomatlarini bilasiz?
3. Taqqoslash alomati nima?
4. Umumlashgan taqqoslash alomatini ayting.
5. Qator yaqinlashishining Dalamber alomati qanday?

6. Qator yaqinlashishining Koshi alomati qanday?
7. Qator yaqinlashishining integral alomati nimadan iborat?
8. Qator qoldig'i integral alomati yordamida qanday baholanadi?
9. Qator yig'indisi integral alomati yordamida qanday baholanadi?

15-MA'RUZA ISHORALARI ALMASHINUVCHI QATORLAR. LEYBNIS ALOMATI. ABSOLYUT VA SHARTLI YAQINLASHUVCHI QATORLAR. ABSOLYUT VA SHARTLI YAQINLASHUVCHI QATORLARNING XOSSALARI

REJA:

1. Ishoralari navbat bilan almashib keladigan qatorlar.
2. O'zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.

Tayanch ibora va tushunchalar: Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar, o'zgaruvchan ishorali qatorlar, Leybnits alomati, absolyut va shartli yaqinlashish.

1. Ishoralari navbat bilan almashib keladigan qatorlar.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \quad (15.1)$$

ko'rinishdagi qatorga **ishoralari navbat bilan almashib keladigan** qator deyiladi. Bu yerda $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ musbat sonlar.

Teorema 15.1(Leybnits alomati). Agar ishorasi navbat bilan almashinib keluvchi

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

qatorda

1) qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi, ya'ni

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots > u_n > \dots \quad (15.2)$$

bo'lsa,

2) qator umumiy hadi u_n $n \rightarrow \infty$ da nolga intilsa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad (15.3)$$

u holda bu qator yaqinlashuvchi bo'ladi va $0 < S < u_1$.⁷⁰

Isbot. ► $n = 2m$, ya'ni juft bo'lsin.

$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$, demak $S_{2m} > 0$ va xususiy yig'indilar ketma-ketligi S_{2m} o'suvchi, (15.2) shartga ko'ra, har bir qavs ichidagi ifoda musbat ekanligi kelib chiqadi.

Endi S_{2m} xususiy yig'indilarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$$

Bu ifodaning har bir qavs ichidagi ishoralari musbat. Shu sababli $u_1 > S_{2m}$.

Shunday qilib, S_{2m} xususiy yig'indilar ketma-ketligi o'suvchi va yuqoridan chegaralangan. Demak $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ shu bilan birgalikda $u_1 > S > 0$. Xuddi shu kabi toq indeksli S_{2m+1} xususiy yig'indilar ham S limitga intiladi.

Haqiqatan, ham

⁷⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

bo'lgani uchun $m \rightarrow \infty$ da

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + u_{2m+1} = S$$

ga ega bo'lamiz, bunda (15.3) shartga ko'ra,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$$

Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, qator yaqinlashuvchi. ◀

1-misol. $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$ qatorning yaqinlashuvchanligini

tekshiring.

Yechish. $\frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{4^2} > \dots > \frac{1}{(n+1)^2} > \dots$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$.

Demak, qator yaqinlashuvchi.

Natija 15.2. Ishorasi navbat bilan almashinib keluvchi (15.1) qator qoldig'i $|r_n| < u_{n+1}$ tengsizlikni qanoatlantiradi.⁷¹

2-misol.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

qatorning yig'indisini $\delta = 10^{-3}$ aniqlikda hisoblang.

Yechish. Qatorda $u_k = \frac{1}{k!}$, qator Leybnits alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi. $|r_n| < u_{n+1}$

tengsizlik $n = 6$ uchun o'rinli ekanini ko'rishimiz mumkin.

$$0 < r_6 < b_7 = \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} = 0.0002 < 10^{-3}$$

Demak,

$$S \approx S_6 = 0,368056... \approx 0,368.$$

Endi ixtiyoriy ishorali o'zgaruvchan ishorali qatorlar va ularning absolyut va shartli yaqinlashishi kabi muhim tushunchalarni ko'raylik

2. O'zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots \quad (15.4)$$

qatorning cheksiz ko'p musbat va cheksiz ko'p manfiy hadlari bo'lsa, u holda bu qatorga **o'zgaruvchan ishorali qator** yoki ixtiyoriy hadli qator deyiladi.

⁷¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

(15.4) qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \dots + |u_n| + \dots \quad (15.5)$$

qatorni tuzaylik.

15.3-ta'rif. (15.4) va (15.5) qatorlar bir paytda yaqinlashuvchi bo'lsa, (15.4) qatorga *absolyut yaqinlashuvchi* qator deyiladi.

15.4-ta'rif. Agar (15.4) qator yaqinlashuvchi bo'lib (15.5) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan (15.4) qatorga *shartli yaqinlashuvchi* qator deyiladi.⁷²

3-misol. Quyidagi qatorni ko'raylik:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

Leybnits, alomatiga ko'ra bu qator yaqinlashuvchi, lekin qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ qator esa uzoqlashuvchi. Demak, qator shartli yaqinlashuvchi.

Teorema 15.5. Agar (15.5) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (15.4) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.⁷³

Isbot. ► S_n va S'_n mos ravishda (15.4) va (15.5) qatorlarning n -xususiy yig'indilari bo'lsin. S_n^+ bilan barcha musbat va S_n^- bilan S_n xususiy yig'indidagi barcha manfiy ishorali hadlar qiymatlari yig'indisini belgilaymiz. U holda

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \quad S'_n = S_n^+ + S_n^-$$

Shartga ko'ra, (15.5) qator yaqinlashuvchi, shu sababli S'_n yig'indi S yig'indiga ega. S_n^+ va S_n^- lar esa musbat va o'suvchi, shu bilan birgalikda $S_n^+ \leq S'_n < S$ va $S_n^- \leq S'_n < S$ (chegaralangan), demak, ular ham limitga ega:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ = S^+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^- = S^-$$

$S_n = S_n^+ - S_n^-$ munosabatdan S_n ham limitga egaligi kelib chiqadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^- = S^+ - S^- \quad \blacktriangleleft$$

4-misol. Quyidagi qatorni ko'ramiz:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots$$

Yechish. Bu qator absolyut yaqinlashuvchidir, chunki u yaqinlashuvchidir va uning hadlari absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchidir ($r=2>1$).

⁷² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁷³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

5-misol. O'zgaruvchan ishorali

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

Qatorning yaqinlashishini tekshiring, bu yerda α -ixtiyoriy haqiqiy son.

Yechish. Berilgan qator bilan birga

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots$$

qatorni qaraymiz. Bu yaqinlashuvchi

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

qator bilan taqqoslaymiz.

$$\text{Ravshanki, } \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad n=1,2,\dots$$

Shu sababli, taqqoslash alomatiga ko'ra absolyut hadli qatorlar yaqinlashuvchi. U holda yuqorida isbotlangan teorema ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning quyidagi xossalarini qayd qilamiz:

a) agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rnini har qancha almashtirilganda ham u absolyut yaqinlashuvchi bo'lib qolaveradi, bunda qatorning yig'indisiuning hadlari tartibiga bog'liq bo'lmaydi (bu xossa shartli yaqinlashuvchi qatorlar uchun o'rinli bo'lmisligi mumkin);

b) agar qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rinlarini shunday almashtirish mumkinki, natijada uning yig'indisi o'zgaradi va almashtirishdan keyin hosil bo'lgan qator uzoqlashuvchi qator bo'lib qolishi ham mumkin.

Misol uchun shartli yaqinlashuvchi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

qatorni olamiz. Uning yig'indisini S bilan belgilaymiz. Qator hadlarini har bir musbat haddan keyin ikkita manfiy had turadigan qilib almashtiramiz:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

Har bir musbat hadni undan keyin keladigan manfiy had bilan qo'shamiz:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

Natijada hadlari berilgan qator hadlarini $\frac{1}{2}$ ga ko'paytirishdan hosil bo'lgan qatorga ega

bo'lamiz. U holda bu qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\frac{1}{2}S$ ga teng. Shunday qilib, qator hadlarining joylashish tartibini o'zgartirish bilangina uning yig'indisini ikki marta kamaytirdik.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi qatorlar yaqinlashishini tekshiring hamda yaqinlashuvchi bo'lsa, absolyutmi yoki shartli ekanligini aniqlang.

1. $\frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{40} + \dots$

2. $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}.$

3. $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{3n+5}.$

4. $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}.$

5. $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}.$

6. $\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$

7. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

8. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$

9. $\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \dots$

10. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$

Nazorat uchun savollar

1. O'zgaruvchan ishorali qator deb nimaga aytiladi?
2. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar qanday alomat bilan tekshiriladi?
3. Leybnits alomati nimadan iborat?
4. Absolyut yaqinlashuvchi qator deb nimaga aytiladi?
5. Shartli yaqinlashuvchi qator deb qanday qatorga aytiladi?
6. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yordamida, taqribiy hisoblashda, hisoblash xatosi qanday baholanadi?
7. Absolyut yaqinlashuvchi qator qanday xossaga ega?
8. Shartli yaqinlashuvchi qator qanday xossaga ega?

16-MA'RUZA FUNKSIONAL QATORLAR. YAQINLASHISH SOHASI. TEKIS YAQINLASHISH TUSHUNCHASI. VEYERSHTRAS ALOMATI, TEKIS YAKINLASHUVCHI QATORNING XOSSALARI

REJA:

1. Funktsional qatorlar haqida tushunchalar.
2. Tekis yaqinlashish. Veyershtrass alomati.
3. Tekis yaqinlashuvchi funktsional qatorlarning xossalari.

Tayanch ibora va tushunchalar: Funktsional qator, yaqinlashish intervali, yaqinlashish radiusi, tekis yaqinlashish, Veyershtrass alomati, qatorlarni hadlab differensiallash, qatorlarni hadlab integrallash

16.1. Funktsional qatorlar haqida tushunchalar.

16.1-ta'rif. Hadlari x o'zgaruvchining funksiyalardan iborat bo'lgan

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (16.1)$$

ko'rinishdagi qatorga **funktsional qator** deyiladi.

Agar o'zgaruvchi x ning aniq bir qiymatini olsak ya'ni $x = x_0$ deb uni (16.1) ga qo'ysak

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

sonli qattor hosil bo'ladi.⁷⁴

Demak o'zgaruvchi x ga aniq konkret har xil son qiymatlar berish bilan har xil yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lgan sonli qatorlar hosil qilish mumkin ekan.

16.2-ta'rif. Agar (16.1) qator x ning $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ aniq son qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lsa u holda x ning bu $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ son qiymatlar to'plamiga (16.1) ning **yaqinlashish sohasi** deyiladi.⁷⁵

1-misol. $1 + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ funktsional qatorning hadlari mahraji $q = x$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya tashkil qiladi.

Demak, uning yaqinlashishi uchun $|x| < 1$ bo'lishi kerak va $(-1, 1)$ intervalda qatorning yig'indisi $\frac{1}{1-x}$ ga teng. Shunday qilib, $(-1, 1)$ intervalda berilgan qator

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

funktsiyani aniqlaydi, bu esa qatorning yig'indisidir, ya'ni

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

(16.1) Qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisini $S_n(x)$ bilan belgilaylik:

⁷⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁷⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \quad (16.2)$$

Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

chekli limit mavjud bo'lsa (16.1) funksional qatorga **yaqinlashuvchi qator** deyilib $S(x)$ ga esa uning yig'indisi deyiladi.

Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ mavjud bo'lmasa (16.1) funksional qatorga **uzoqlashuvchi** deyiladi.

Agar bu qator x ning biror qiymatida yaqinlashsa, u holda

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

bo'ladi, bu erda $S(x)$ – qatorning yig'indisi $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ - qatorning qoldig'i deyiladi. x ning barcha qiymatlari uchun qatorning yaqinlashish sohasida

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

munosabat o'rinli, shu sababli $\lim_{n \rightarrow \infty} [S(x) - S_n(x)] = 0$ yoki $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, ya'ni yaqinlashuvchi qatorning qoldig'i $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

2. Tekis yaqinlashish. Veyershtrass alomati.

16.2-Ta'rif. Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun ε ga bog'liq, shunday $N(\varepsilon) > 0$ son topilib, barcha $n \geq N$ da ko'rsatilgan sohaga tegishli x lar uchun

$$r_n(x) = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, (16.1) qator ko'rsatilgan sohada **tekis yaqinlashuvchi qator** deyiladi.⁷⁶

Teorema(Veyershtrass alomati).

Agar $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ funksional qatorning hadlari biror $[a, b]$ sohada absolyut qiymati bo'yicha biror yaqinlashuvchi musbat ishorali

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (16.2)$$

qatorning mos hadlaridan katta bo'lmasa, ya'ni

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (16.3)$$

bo'lsa, u holda berilgan funksional qator ko'rsatilgan $[a, b]$ sohada tekis yaqinlashadi.⁷⁷

Isbot. (16.2) Qator yig'indisini σ bilan belgilaymiz: $\sigma = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$

⁷⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁷⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

U holda $\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n$ bu erda σ_n - n -xususiy yig'indi, ε_n esa bu qatorning n -qoldig'i, ya'ni

$$\varepsilon_n = c_{n+1} + c_{n+2} + \dots \quad (16.4)$$

(16.2) qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, demak $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Endi (16.1) funksional qator yig'indisini

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

ko'rinishda yozamiz, bu erda

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

(16.3) shartdan

$$|u_{n+1}(x)| \leq c_{n+1}, |u_{n+2}(x)| \leq c_{n+2}, \dots$$

va shu sababli (16.4) dan qaralayotgan sohaning barcha x lari uchun $|r_n(x)| < \varepsilon_n$ tengsizlik bajariladi. Demak, (16.1) qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchidir.

1-misol. Ushbu

$$\frac{\sin^2 x}{1^3} + \frac{\sin^2 2x}{2^3} + \dots + \frac{\sin^2 nx}{n^3} + \dots$$

funksional qator x ning barcha haqiqiy qiymatlari uchun tekis yaqinlashadi, chunki barcha x

va n -larda $\left| \frac{\sin^2 nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$ qator esa yaqinlashuvchidir.

2-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ yaqinlashuvchilikka qatorni tekshiring.

Veyershtrass alomati bu qator uchun bajarilmaydi, chunki berilgan qator shartli yaqinlashuvchi va $x \geq 0$ lar uchun $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x}$ qator uzoqlashuvchi. Berilgan qatorni tekis

yaqinlashuvchiligini ko'rsatish uchun Leybnis teoremasidan foydalanamiz. Berilgan qator o'zgaruvchi ishorali va $x \geq 0$ da absolyut qiymatlari bo'yicha monoton kamayuvchi va n -hadi $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. SHu sababli, qator $[0, \infty)$ yarim o'qda yaqinlashuvchi va qator

qoldig'i uchun $|r_n(x)| < \frac{1}{n+1+x}$ $x \geq 0$ da $|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ ga ega bo'lamiz va $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

bo'lgani uchun, qator tekis yaqinlashuvchi.

3. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlar uchun funksiyalar chekli yig'indisi xossalarini tatbiq qilish mumkin.

1-teorema. Agar

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qatorning har bir hadi $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qatorning yig'indisi $S(x)$ ham shu kesmada uzluksiz bo'ladi.⁷⁸

3-misol. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n$ funksiyani aniqlanish sohasini toping va uzluksizligini tekshiring.

Yechish. Berilgan funksional qatorni Koshi alomatiga ko'ra aniqlanish sohasini topamiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right) = x^2$$

Shu sababli $x^2 < 1$ da qator yaqinlashuvchi va $x^2 > 1$ da uzoqlashuvchi, ya'ni qator $(-1, 1)$ oraliqda qator yaqinlashuvchi. $x = \pm 1$ nuqtalarda uzoqlashuvchi, chunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi.

Funksiyani uzluksizligini tekshiramiz. Buning uchun qatorni $0 < a < 1$ bo'lgan ixtiyoriy $[-a, a]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

$0 < a < b < 1$ son olamiz va shunday N topiladiki, $n \geq N$ da $a + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq b$. U holda $|x| \leq a$ lar uchun

$$\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(|x| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq \left(a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq b^{2n}$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki, $b^2 + b^4 + b^6 + \dots + b^{2m} + \dots$ qator $[-a, a]$ da yaqinlashuvchi (chunki bu qator mahraji $b^2 < 1$ bo'lgan geometrik progressiya), shu sababli berilgan qator tekis yaqinlashuvchi. Demak, $f(x)$ funksiya $[-a, a]$ kesmada uzluksiz. a ($0 < a < 1$) ning ixtiyoriyligidan $f(x)$ funksiya $(-1, 1)$ oraliqda uzluksiz.

2-teorema. (Qatorlarni hadlab integrallash)

Agar

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qatorning har bir hadi $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

⁷⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots +$$

tenglik o'rinli bo'ladi.⁷⁹

$$\text{Isbot. } \blacktriangleright S(x) = S_n(x) + r_n(x) = \underbrace{u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)}_{S_n(x)} + r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

(16.1) qator tekis yaqinlashuvchi qator bo'lgani uchun Veyershtrass teoremasidagi kabi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b r_n(x)dx = 0 \text{ ekanligi ravshan.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b r_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx \right] \Rightarrow$$

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots +$$

Teorema isbot bo'ldi ◀.

4-misol. $1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$ funksional qator $|x| < 1$ da tekis yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ga teng. Berilgan qatorni 0 dan $x < 1$ gacha hadlab integrallaymiz va quyidagi qatorga ega bo'lamiz :

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Bu qator qator $|x| < 1$ da tekis yaqinlashadi va uning yig'indisi quyidagiga teng:

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctg \Big|_0^x = \arctg x .$$

Shunday qilib $|x| < 1$ da tekis yaqinlashuvchi

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

qatorga ega bo'ldik.

3-teorema. (Qatorlarni hadlab differensiallash)

Agar $[a, b]$ kesmada hosilalari uzluksiz bo'lgan funksiylardan tuzilgan.

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qator shu kesmada yaqinlashuvchi va yig'indisi $S(x)$ bo'lsa, u holda uning hadlarining hosilalaridan tuzilgan.

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots$$

qator ham tekis yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $S'(x)$ bo'ladi.⁸⁰

⁷⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

5-misol. 4- misolni qaraymiz:

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

bundan

$$x \arctg x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} + \dots$$

ekani kelib chiqadi. Bunda o'ng tomonda biror qator turibdi. Shu qatorni hadlab differensiallab quyidagini topamiz:

$$2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Dalamber alomatiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2n+2}{2n+1} x^{2n+1}}{\frac{2n}{2n-1} x^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)(2n-1)}{(2n+1)^2} x^2 = x^2.$$

Shunday qilib, qator absolyut yaqinlashuvchi va barcha $|x| < 1$ lar uchun tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak, berilgan qatorning hosilalaridan tuzilgan qator berilgan qator yig'indisidan olingan hosilaga yaqinlashadi:

$$\arctg x + \frac{x}{1+x^2} = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$|x| < 1$ da tekis yaqinlashuvchidir.

Mustaqil yechish uchun misollar

$$1. \quad \frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^3 + \dots$$

funksional qatorning $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$2. \quad 1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$3. \quad \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

⁸⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Nazorat uchun savollar

1. Funksional qator tushunchasi.
2. Funksional qatorni yaqinlashishini qanday tasavvur qilasiz?
3. Qatorning yaqinlashish sohasini qanday tushunasiz?
4. Yaqinlashish sohasi bitta nuqtadan iborat qatorga misol keltiring.
5. Yaqinlashish sohasi R dan iborat qatorga misol keltiring.
6. Funksional qator uzoqlashuvchiligini qanday izohlaysiz?
7. Yaqinlashish alomatlari funksional qatorlarda qanday ishlatiladi?

17-MA'RUZA DARAJALI QATORLAR. ABEL TEOREMASI. YAQINLASHISH RADIUSI VA INTERVALI. ABSOLYUT YAKINLASHUVCHI DARAJALI QATORLARNING XOSSALARI

REJA:

1. Darajali qatorlar. Abel teoremasi.
2. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va intervali.
3. Yaqinlashuvchi darajali qatorning xossalari

Tayanch ibora va tushunchalar. Darajali qator, Abel teoremasi, yaqinlashish radiusi va intervali, tekis yainlashish, Veyershtass alomati, qatorlarni hadlab differensiallash, qatorlarni hadlab integrallash.

1. Darajali qatorlar. Abel teoremasi.

17.1 - ta'rif: Darajali qator deb

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (17.1)$$

ko'rinishdagi funksional qatorga aytiladi. $x_0 = 0$ da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (17.2)$$

ko'rinishdagi x ning darajalari bo'yicha yoyilgan darajali qatorga ega bo'lamiz.⁸¹

Bu yerda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lar o'zgarmas sonlar bo'lib ularga darajali qatorning koeffitsiyentlari deyiladi.

Demak, darajali qatorlar funksional qatorning xususiy holidan iborat.

Har qanday darajali qator $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki bu holda (17.1) – qator $a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots + a_n \cdot 0^n + \dots$ ko'rinishda sonli qatorga aylanadi va $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 = a_0$ bo'ladi.

17.2 - Teorema: (Abel teoremasi).

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (17.1) darajali qator x ning $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda x ning $|x| < |x_0|$ (17.2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida (17.1) – darajali qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. $(-|x_0|, |x|)$ ⁸²

⁸¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

⁸² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Isboti: ► Teoremaning shartiga ko‘ra $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n + \dots$ sonli qator yaqinlashuvchi, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} a_nx_0^n = 0$ (17.3)

Demak, $|a_nx_0^n| < M > 0$ (17.2) o‘rinli (17.1) - qatorni quyidagicha yozib olamiz.

$$a_0 + a_1x_0 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_nx_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots \quad (17.4)$$

Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan quyidagi qatorni tuzamiz.

$$|a_0| + |a_1x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + |a_nx_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (17.5)$$

quyidagi geometrik qatorni qaraymiz.

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (17.6)$$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ dan (17.6) yaqinlashuvchi (17.5) ham yaqinlashuvchi.

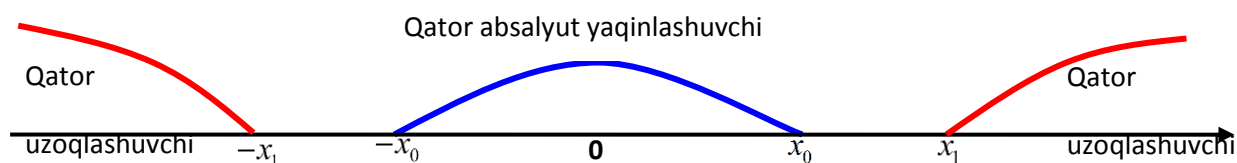
Demak, (17.1) qator absolyut yaqinlashadi. ◀

17.3 – Natija: Agar (1) darajali qator $x = x_0$ da uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda x ning $|x| > |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma qiymatlarida uzoqlashuvchi bo‘ladi.⁸³

2. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va intervali.

Abel teoremasi darajali qatorning yaqinlashish va uzoqlashish nuqtalarining joylashishlari haqida mulohaza yuritish imkonini beradi. Haqiqatdan, agar $x = x_0$ nuqta yaqinlashish nuqtasi bo‘lsa, u holda $(-|x_0|, |x|)$ intervalning hammasi absolyut yaqinlashish nuqtalari bilan to‘ldirilgan. Agar $x = x_1$ nuqta uzoqlashish nuqtasi bo‘lsa, u holda $|x_1|$ dan o‘ngdagi cheksiz yarim to‘g‘ri chiziqning va $-|x_1|$ dan chapdagi cheksiz yarim to‘g‘ri chiziqning hammasi uzoqlashish nuqtalaridan iborat bo‘ladi.

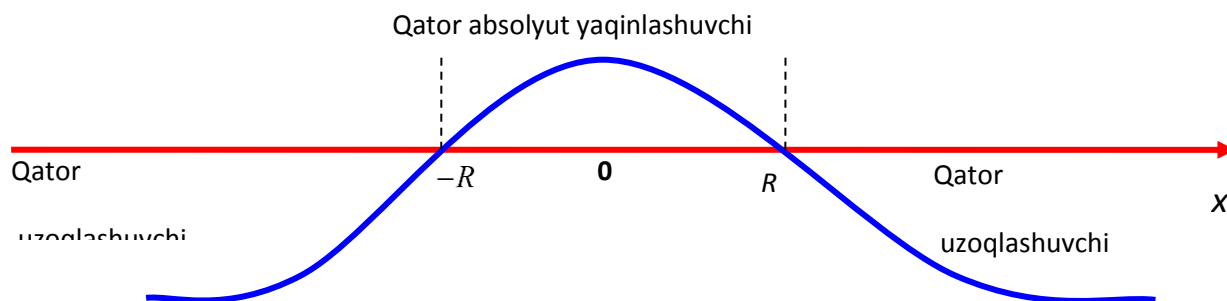
⁸³ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010



17.1 – chizma

Bundan shunday R son mavjud ekanligi va $|x| < R$ da absolyut yaqinlashish, $|x| > R$ da esa uzoqlashish nuqtalariga ega bo‘lishimiz kelib chiqadi. Shunday qilib, darajali qatorning *yaqinlashish sohasi markazi koordinatalar boshida bo‘lgan intervaldan iborat* (17.1-shakl).

17.2-ta’rif: $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n + \dots$ darajali qatorning yaqinlashish sohasi deb shunday $(-R, R)$ intervalga aytiladiki, bu intervalning ichidagi har qanday x nuqtada qator yaqinlashadi va shu bilan birga absolyut yaqinlashadi, undan tashqarida yotuvchi x nuqtalarda qator uzoqlashadi. R soni darajali qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi (17.2-shakl).⁸⁴



17.2- chizma.

Intervalning chetki nuqtalarida, ya’ni $x = R$ va $x = -R$ nuqtalarda berilgan qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi masalasi har bir qator uchun alohida hal qilinadi.

Ba’zi qatorlar uchun yaqinlashish intervali nuqtaga aylanib qodadi, u holda

$R = 0$ bo‘ladi; ba’zilari uchun esa butun Ox o‘qini qamrab oladi, ya’ni $R = \infty$ bo‘ladi.

Darajali qator yaqinlashish radiusini aniqlash uchun formula chiqaramiz, ya’ni (17.2) – darajali qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

⁸⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (17.7)$$

musbat hadli qatorni qaraymiz. (17.7) – qatorni Dalamber alomatiga ko‘ra yaqinlashishga tekshiramiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot l \quad (17.8)$$

mavjud bo‘lsin. Unda (17.2) – qator

1) agar $|x| \cdot l < 1 \rightarrow |x| < \frac{1}{l}$ bo‘lsa yaqinlashuvchi,

2) agar $|x| \cdot l > 1 \rightarrow |x| > \frac{1}{l}$ bo‘lsa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Demak , (17.2)- darajali qator $x \in \left(-\frac{1}{l}; \frac{1}{l}\right)$ intervalda absolyut yaqinlashadi va

$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{l}\right) \cup \left(\frac{1}{l}; +\infty\right)$ intervalda uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Yuqoridagilardan $x \in \left(-\frac{1}{l}; \frac{1}{l}\right)$ interval (17.2) – qatorning yaqinlashish intervali ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (17.9)$$

Bu (17.2) – darajali qatorning yaqinlashish radiusini topish formulasidan iborat.

$x \in (-R, R)$ intervalga (17.2) – darajali qatorning a yaqinlashish intervali deyiladi.

Eslatma: 1) agar $R = 0$ bo‘lsa, (17.1) – qator $x = 0$ nuqtadan tashqari barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi bo‘lishi mumkin.⁸⁵

2) Agar $R \rightarrow \infty$ bo‘lsa, barcha x larda (17.1) – qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi, ya'ni bu holda absolyut yaqinlashish intervali $x \in (-\infty; +\infty)$ bo‘ladi.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad (17.10)$$

umumlashgan darajali qator berilgan bo‘lsin. Bu qatorning yaqinlashish intervali

$$|x-a| < R \Leftrightarrow -R < x-a < R \Leftrightarrow a-R < x < a+R$$

⁸⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

dan iborat bo'ladi.

Yaqinlashish intervalini aniqlash uchun shuningdek Koshi alomatidan ham foydalanish mumkin, u holda

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}} \quad (17.11)$$

1-misol. Darajali qatorning yaqinlashish intervali topilsin:

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2x)^n}{n} + \dots$$

Yechish: $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^n}{n}$, $a_{n+1} = (-1)^{n+2} \cdot \frac{2^{n+1}}{n+1}$.

Shu sababli

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Demak, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ interval yaqinlashish interval bo'ladi.

$x = \frac{1}{2}$ da $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ qatorga ega bo'lamiz, bu qator Leybnits alomati bo'yicha yaqinlashuvchi: **a)** $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$ **b)** $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$.

$x = -\frac{1}{2}$ da $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$ qatorga ega bo'lamiz, bu qator garmonik qator sifatida uzoqlashuvchi.

Natijaviy yaqinlashish interval quyidagicha: $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

2-misol. Darajali qatorning yaqinlashish intervali topilsin:

$$\frac{(x-1)}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n} + \dots$$

Yechish: $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$ shu sabab

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)}{n \cdot 2^n} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 2.$$

Yaqinlashish intervalning markazi $x=1$ nuqtada. Shuning uchun yaqinlashish intervali

$$-2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -2+1 < x < 2+1 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

dan iborat bo'ladi.

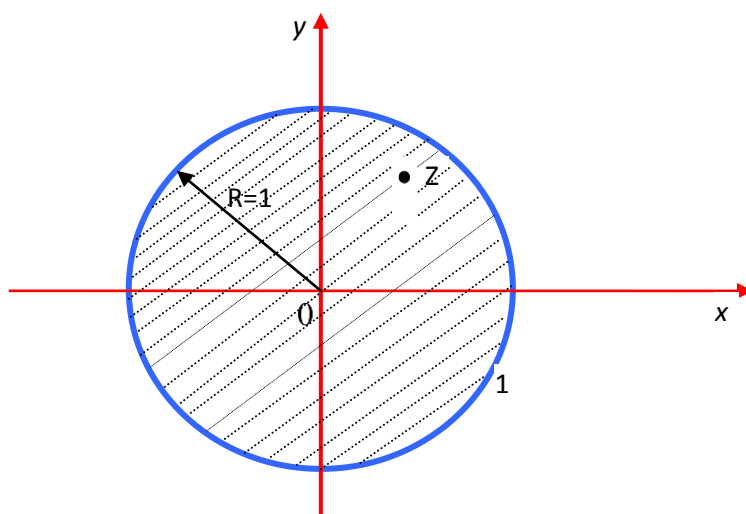
$x=-1$ da $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ qatorga ega bo'lamiz, bu qator Leybnits alomati

bo'yicha yaqinlashuvchi: **a)** $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$ **b)** $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

$x=3$ da $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ qatorga ega bo'lamiz, bu qator garmonik qator sifatida uzoqlashuvchi.

Yuqoridagilarni inobatga olsak yaqinlashish interval quyidagicha bo'ladi: $x \in [-1, 3)$.

3-misol. $1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$ $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = 1$



3. Absolyut yaqinlashuvchi darajali qatorlarning xossalari.

1-xossa. Agar darajali qator $x \in (-R, R)$ intervalda yaqinlashsa, u holda bu intervalning hamma nuqtalarida qator yig'indisi uzluksiz funksiyadir.

2-xossa. Yaqinlashish intervalining barcha ichki nuqtalarida darajali qatorni hadma-had differensiallash mumkin

3-xossa. Darajali qatorni ixtiyoriy $x \in [a; b] \subset (-R, R)$ da hadma-had integrallash mumkin.⁸⁶

Nazorat uchun savollar

1. Darajali qator deb nimaga aytiladi?
2. Abel teoremasini ayting.
3. Yaqinlashish radiusi nima? Yaqinlashish intervali-chi?
4. Abel teoremasidan qanday natija kelib chiqadi?
5. Absolyut yaqinlashuvchi darajali qatorlarning qanday xossalari bor?

⁸⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

18-MA'RUZA TEYLOR VA MAKLOREN QATORLARI. ULARNING QO'LLANISHI

REJA:

1. Teylor va Makloren qatorlari
2. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish.
3. Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari.

Tayanch ibora va tushunchalar Teylor qatori, Makloren qatori, qatorga yoyish, taqribiy hisoblashlar.

18.1. Teylor va Makloren qatorlari.

$y = f(x)$ funksiya a nuqtada va uning biror atrofida uzluksiz va a nuqtada istalgan tartibda hosilaga ega bo'lsin.

Ushbu masalani qo'yamiz: $f(x)$ funksiyani darajali qator ko'rinishida tasvirlash mumkin va hamma vaqt hosil bo'lgan darajali qatorni berilgan $f(x)$ ko'rinishda tasvirlash mumkin, ya'ni

$$f(x) = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \dots + c_n \cdot (x-a)^n + \dots \quad (18.1)$$

endi $f(x)$ funksiyaning darajali qator koeffitsientlari bilan qanday bog'langanligini ko'ramiz. (18.1) da $x = a$ deb $f(a) = c_0$ ekanligini topamiz. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiyani yaqinlashish intervali a nuqtaning biror atrofida bo'lsin, u holda qatorni bu atrofda hadma had differensiallash mumkin, ya'ni

$$f'(x) = c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot (x-a) + n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1} + \dots \quad (18.2)$$

(18.2) da $x = a$ desak $f'(a) = c_1$ bo'ladi.⁸⁷

$$f''(x) = 2 \cdot c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3 \cdot (x-a) + \dots + n \cdot (n-1) \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-2} + \dots \quad (18.3)$$

(18.3) da $x = a$ desak $f''(a) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c_4 \cdot (x-a) + \dots + n(n-1)(n-2) \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-3} + \dots \quad (18.4)$$

(18.4) da $x = a$ desak $f'''(a) = 2 \cdot 3 \cdot c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$ va hokazo

⁸⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (18.5) \text{ Teylor koefitsienti.}$$

(18.5) Teylor koefitsientlarini (18.1) ga qo'yamiz.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (18.6)$$

(18.6) formula $f(x)$ funksiyani a nuqtaning atrofida Teylor qatori deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada $(n+1)$ - tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda quyidagi Teylor formulasi o'rinlidir:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

bu yerda $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ($0 < \theta < 1$) bo'lib, Lagranj shaklidagi qoldiq hadi deyiladi.

$a = 0$ da Teylor formulasining xususiy holi - Makloren formulasi hosil bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

bu yerda,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).^{88}$$

$y = f(x)$ funksiya a nuqta atrofida istalgan marta differensiallanuvchi bo'lsa va bu nuqtaning biror atrofida $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ bo'lsa, Teylor va Makloren formulalaridan

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

va

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Qatorlar hosil bo'ladi. Bularning birinchisi **Teylor qatori**, ikkinchisiga **Makloren qatori** deyiladi.

⁸⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Bu qatorlar x ning $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ bo'ladigan qiymatlarida $f(x)$ ga yaqinlashadi. a nuqtani o'z ichiga oluvchi biror intervalda istalgan n uchun $|f^{(n)}(x)| < M$, (M biror musbat son) tengsizlik bajarilsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ bo'ladi va $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi.

18.2. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish

Ayrim funksiyalarni darajali qatorga yoyamiz.

1) $f(x) = e^x$, istalgan x uchun

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x, \dots, x = 0$$

deb,

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1, \dots$$

Bularni Makloren qatoriga qo'yib,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan $x = 1$ desak,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

bo'lib, e sonli qator yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi. Bundan foydalanib e sonining taqribiy qiymatini istalgan darajadagi aniqlikkacha hisoblash mumkin.⁸⁹

2) $f(x) = \sin x$. Istalgan x uchun

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \dots$$

bundan

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots$$

bo'lib, bularni Makloren qatoriga qo'ysak,

⁸⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

hosilbo‘ladi.

Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchi $-\infty < x < +\infty$. Oxirgi qatorni hadlab differensiallasak,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

qator hosil bo‘ladi, bu $f(x) = \cos x$ funksiya uchun Makloren qatori bo‘ladi.

3) Xuddi yuqoridagidek usul bilan $f(x) = (1+x)^m$ funksiya uchun

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \dots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qatorga **binomial qator** deyiladi. U $(-1,1)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.⁹⁰

4) $f(x) = \ln(1+x)$ funksiya uchun yuqoridagi usul bilan

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

yoyilmani hosil qilish mumkin.

1-misol. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ funksiyani x ning darajalari bo‘yicha qatorga yoying.

Yechish. Yuqoridagi $\cos x$ uchun keltirilgan qatorda x ni $\sqrt{x}$ bilan almashtirsak,

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$$

bo‘ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchidir, biroq $\cos \sqrt{x}$ funksiya $x < 0$ da aniqlanmaganligini hisobga olib, hosil qilingan qator $\cos \sqrt{x}$ funksiyaga $0 \leq x < +\infty$ da yaqinlashadi.

⁹⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

18.3. Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari.

Bir necha misollar qaraymiz.

2-misol. $\cos x$ ning yoyilmasidan foydalanib $\cos 18^\circ$ ni 0,001 aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. $\cos x$ funktsiyaning qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\cos 18^\circ = \cos \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 - \dots$$

qatorni hosilqilamiz.

$$\frac{\pi}{10} = 0,31416; \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 = 0,09870; \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 = 0,00974.$$

va $\frac{1}{6!} \cdot \left(\frac{\pi}{10} \right)^6 < 0,0001$ bo'lganligi uchun, taqribiy hisoblashda qatorning birinchi uchta

hadi bilan chegaralanamiz, demak

$$\cos 18^\circ \approx 1 - \frac{0,09870}{2} + \frac{0,00974}{24}; \text{ yoki } \cos 18^\circ \approx 0,9511.$$

3-misol. $\sqrt[5]{1,1}$ ni 0,0001 aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish: $\sqrt[5]{1,1} = (1 + 0,1)^{\frac{1}{5}}$ deb, binomial qatordan foydalansak:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1,1} &= (1 + 0,1)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1)}{2!} 0,01 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1) \cdot (\frac{1}{5} - 2)}{3!} 0,001 + \\ &+ \dots = 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \dots \end{aligned}$$

bo'ladi. To'rtinchi had $0,000048 < 0,0001$ bo'lganligi uchun, hisoblashda birinchi uchta hadini olib, hisoblaymiz:

$$\sqrt[5]{1,1} \approx 1 + 0,02 - 0,0008 = 1,0192.$$

4-misol. $\sqrt[3]{130}$ ni 0,001 aniqlikkachataqribiyhisoblang.

Yechish. 5^3 soni 130 ga eng yaqin butun sonning kubi bo'lganligi uchun $130 = 5^3 + 5$ deb olish qulay bo'lib,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{130} &= \sqrt[3]{5^3 + 5} = \sqrt[3]{5^3 \left(1 + \frac{1}{25}\right)} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 5 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 + \frac{\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1)}{2!} \cdot 0,0016 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1) \cdot (\frac{1}{3} - 2))}{3!} \cdot 0,000064 + \dots\right) = 5 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 0,0016 + 5 \frac{25}{81} \cdot 0,000032 - \dots\end{aligned}$$

oxirgi qatorda to'rtinchi had 0,001 dan kichik bo'lganligi uchun, birinchi uchta had bilan chegaralanamiz:

$$\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0,0667 - 0,0009 \approx 5,066.$$

5-misol. $\ln 1,04$ ni 0,0001 gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: $\ln(1+x)$ funktsiyaning darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\ln(1+0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{3} - \frac{0,04^4}{4} + \dots,$$

yoki

$$\ln 1,04 = 0,04 - 0,0008 + 0,000021 - 0,00000064 + \dots$$

qatorni hosil qilamiz, hamda uchinchi had 0,0001 dan kichik bo'lganligi uchun birinchi ikki hadni hisobga olib hisoblaymiz:

$$\ln 1,04 \approx 0,0392.$$

Nazorat uchun savollar

1. Makloren va Teylor formulalari qanday bo'ladi?
2. Teylor qatori deb qanday qatorga aytiladi?
3. Makloren qatori Teylor qatoridan kelib chiqadimi?
4. Qanday funktsiyalarni Teylor qatoriga yoyish mumkin?
5. $f(x) = e^x$ funktsiyaning darajali qatorga yoyilmasi qanday bo'ladi?
6. $f(x) = \sin x$ funktsiya Makloren qatoriga qanday yoyiladi?
7. $f(x) = \cos x$ funktsiyaning Makloren qatoriga yoyilmasini yozing?
8. Binomial qator qanday bo'ladi?
9. $f(x) = \ln(1+x)$ funktsiyani Makloren qatoriga yoying?
10. $\cos 18^\circ$ ni taqribiy hisoblang? (18° radian o'lchovda 0,314).
11. Qatorlardan foydalanib $\sqrt[5]{1,1}$ ni taqribiy hisoblang?
12. $\sqrt[3]{130}$ ni taqribiy hisoblang?
13. $\ln(1,04)$ ni taqribiy hisoblang?

19-MA'RUZA FUNKSIYALARNING ORTOGONAL VA ORTONORMAL SISTEMALARI. FUNKSIYANI ORTONORMAL SISTEMALAR BUYICHA FURE QATORIGA YOYISH. DIRIXLE SHARTI

Reja:

1. Ortogonal va ortonormal funksiyalar sistemasi.
2. Ortogonal funksiyalar sistemasi bo'yicha funksiyalarni Fure qatoriga yoyish.
3. 2π davrlifunksiya uchun Fure qatori.
4. Dirixle teoremasi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ortogonal va ortonormal funksiyalar sistemasi, trigonometrik qator, Fure koefitsientlari, Fure qatori, bo'lakli uzluksiz funksiya, funksiyaning normasi, bo'lakli monoton funksiya, Dirixle sharti, Dirixle teoremasi.

1-ta'rif. Agar $\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0$ ($m \neq n$) bo'lsa, funksiyalarning $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ cheksiz sistemasi $[a; b]$ kesmada **ortogonal sistema** deyiladi.⁹¹

Biz trigonometrik funksiyalarning

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

sistemasi bilan ish ko'rgan edik, bu sistema $[-\pi; \pi]$ da ortogonal edi, chunki

agar $m \neq n$ bo'lsa $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0$,

agar $m \neq n$ bo'lsa $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0$,

har qanday m va n uchun $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$.

Boshqa trigonometrik funksiyalarning ham ortogonalini isbotlash mumkin:

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ $[0; \pi]$ kesmada,

$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$ $[0; \pi]$ kesmada,

⁹¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$ $[-l; l]$ kesmada.

2-ta'rif. Agar

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1$$

bo'lsa, funksiyalarning $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ cheksiz sistemasi $[a; b]$ kesmada **normallangan sistema** deyiladi.

Funksiyaning har qanday ortogonal sistemasini normallash mumkin. Buning ma'nosi quyidagidek: har doim $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ o'zgarmas sonlarni

$$\mu_0 \varphi_0(x), \mu_1 \varphi_1(x), \dots, \mu_n \varphi_n(x), \dots$$

funksiyalar sistemasi avvalgidek ortogonal, shu bilan birga, endi normallangan qilib tanlash mumkin.

Haqiqatan, agar $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \lambda_n^2$ (bunda $\lambda_n \neq 0$) bo'lsa, u holda $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$. SHundan keyin

$$\int_a^b \mu_n^2 \varphi_n^2(x) dx = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \frac{1}{\lambda_n^2} \lambda_n^2 = 1$$

tenglikka ega bo'lamiz. λ_n miqdorni $\varphi_n(x)$ funksiyaning normasi deb ataymiz va $\|\varphi_n\|$ ko'rinishda belgilaymiz. SHunday qilib,

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}$$

Agar sistema normallangan bo'lsa, u holda ravshanki, $\|\varphi_n\| = 1$ bo'ldi.

3-ta'rif. Agar funksiyalarning $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ cheksiz sistemasi ortogonal va normallangan bo'lsa, boshqacha aytganda, agar

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \neq n \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } m = n \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lsa, u holda sistema $[a ; b]$ kesmada **ortonormallangan sistema** deyiladi.

Masalan, funksiyalarning $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ sistemasi $[-\pi ; \pi]$ kesmada ortogonal, ammo normallangan emas, chunki

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi,$$

bu har qanday $n \neq 0$ da (3) dan kelib chiqadi. Bu sistemani normallashtirish uchun undagi funksiyalarning har birini $\sqrt{\pi}$ ga bo'lish kerak. Funksiyalar sistemasining $[-\pi ; \pi]$ kesmada ortonormallashtirilgan

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots$ sistemaga ega bo'lamiz.⁹²

Ixtiyoriy $[a ; b]$ kesmaga qaytamiz. Bu kesmada funksiyalarning biror

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (19.1)$$

ortogonal sistemasi berilgan bo'lsin deylik. Maqsadimiz $[a ; b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiyani (18.1) sistema funksiyalari bo'yicha

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \quad (19.2)$$

ko'rinishdagi qatorlarga yoyishdan iborat. Bu yoyilmaning koeffitsientlarini aniqlash uchun biz xususiylashtirilgan holda yoyilmaning ikkala qismini $\varphi_k(x)$ ga ko'paytirib, uni hadlab integrallaymiz:

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx.$$

(18.1) sistema ortogonal bo'lganligi sababli, o'ngdagi integrallarning bittasidan boshqa hammasi nolga teng bo'ladi va

$$c_k = \frac{1}{\int_a^b \varphi_k^2(x) dx} \cdot \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \quad (19.3)$$

ekanini osongina topiladi. Koeffitsientlari (19.3) formulalar bo'yicha tuzilgan (19.2) qator berilgan $f(x)$ funksiyani umumlashtirilgan Furie qatori, koeffitsientlarning o'zi esa funksiyalarning

⁹² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

sistemasiga nisbatan umumlashgan Fure koefitsientlari deyiladi. Ortonormallangan sistema

holda (19.3) formulalar ayniqsa sodda bo'ladi: $\int_a^b \varphi_k^2(x) dx = 1$ bo'lganda,

$$c_k = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) dx \text{ bo'ladi.}$$

Dirixle teoremasi. $(-\pi; \pi)$ intervalda bo'lakli silliq $f(x)$ funksiyaning Fure qatori shu intervalning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi. SHu bilan birga, $f(x)$ funksiya uchun Fure qatorining yig'indisi $S(x)$ bo'lsa, u holda bu funksiya uzluksiz bo'ladigan nuqtalarning hammasida $S(x) = f(x)$, I-tur uzilishga ega bo'lgan nuqtalarning hammasida esa

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$$

Bundan tashqari

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2} (f(\pi-0) + f(-\pi+0)).^{93}$$

Bu teorema **Dirixle teoremasi** deyiladi. Bu teoremaning sharti –funksiya bo'lakli uzluksiz bo'lishi kerakligi ushbu ikkita shartga teng kuchli: funksiya chegaralangan va bo'lakli monoton bo'lishi kerak.

Oxirgi shart funksiya qaralayotgan intervalni chekli sondagi intervallarga bo'lish va bu intervallarning har birida funksiya monoton bo'lishi kerakligini bildiradi.

SHunday qilib, agar $f(x)$ funksiya $(-\pi; \pi)$ intervalda bo'laklimonoton bo'lsa, u holda bu funksiya uchun nuqtada yaqinlashish teoremasi o'rinli. Bu shartlar Dirixle shartlari deyiladi.

Masalan $y = x$ yoki $y = x^2$ funksiyalar $[-\pi; \pi]$ intervalda Dirixle shartlarini qanoatlantiradi. CHunki u chegaralangan va monoton(o'suvchi).

Nazorat uchun savollar

1. Qanday qator trigonometrik qator deyiladi?
2. Funksiyalarning qanday sistemasiga ortogonal sistema deyiladi?
3. Funksiyalarning qanday sistemasiga ortonormal sistema deyiladi?
4. Davri 2π bo'lgan funksiyalar uchun Fure koefitsientini yozing.
5. Dirixle sharti nima?
6. Dirixle teoremasini ayting

⁹³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

20- MA'RUZA FUNKSIYALARNING ORTOGONAL VA ORTONORMAL SISTEMALARI. FUNKSIYANI ORTONORMAL SISTEMALAR BUYICHA FURE QATORIGA YOYISH. DIRIXLE SHARTI

Reja.

1. Toq va juft funksiyalarni Fure qatoriga yoyish.
2. Ixtiyoriy davrli funksiya uchun Fure qatori.

Tayanch ibora va tushunchalar

Toq funksiyalarning Fure qatori, juft funksiyalarning Fure qatori, ixtiyoriy davrli funksiya uchun Fure qatori, davom ettirish, sinuslar bo'yicha yoyish, kosinuslar bo'yicha yoyish.

Biz mazkur kursning oldingi bobida

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qatorini batafsil o'rgandik. Endi har bir hadi

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

garmonikadan iborat ushbu

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (20.1)$$

xususiyl funksionalni qaraylik.

Odatda (20.1) qator trigonometrik qator deb ataladi. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ sonlar esa trigonometrik qatorning koeffitsientlari deyiladi.

Shunday qilib, trigonometrik qator garchand funksional qator bo'lsa ham (uning har bir hadi muayyan funksiyalar bo'lgani uchun) o'z koeffitsientlari $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ lar bilan to'la aniqlanadi.⁹⁴

(20.1) trigonometrik qatorning qisman yig'indisi

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrik ko'phad deb ataladi.

⁹⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

1. Fure qatorining ta'rif. $f(x)$ funksiya $[-\pi; \pi]$ da berilgan va shu oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ ($n=1, 2, \dots$) funksiyalar ham, ikkita integrallanuvchi funksiyalar ko'paytmasi sifatida integrallanuvchi bo'ladi. Bu funksiyalarning integralini hisoblab, ularni quyidagicha belgilaylik:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (20.2)$$

Bu sonlardan foydalanib ushbu

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (20.3)$$

trigonometrik qatorni tuzamiz.

20. 2-ta'rif. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ koeffitsientlari (20.2) formulalar bilan aniqlangan (20.3) trigonometrik qator $f(x)$ funksiyaning **Fure qatori** deb ataladi. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ sonlar esa $f(x)$ funksiyaning **Fure koeffitsientlari** deb ataladi.

Demak, berilgan funksiyaning Fure qatori shunday trigonometrik qatorki, uning koeffitsientlari shu funksiya bog'liq bo'lib, (20.2) formulalar bilan aniqlanadi. SHu sababli (20.3) qatorni (uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishidan qat'iy nazar) ushbu « $\sim$ » belgi bilan quyidagicha yoziladi:

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).^{95}$$

$[-\pi; \pi]$ intervalda berilgan juft va toq funksiyalarni Fure qatoriga yoyish

1. Juft va toq funksiyalar. $f(x)$ funksiya sonlar o'qining hamma erida yoki koordinatalar bo'liga nisbatan simmetrik bo'lgan biror intervalda aniqlangan bo'lsin. Toq va juft funksiyalar ta'riflarini eslatib o'tamiz.

Agar qaralayotgan hamma x lar uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya **juft funksiya** deyiladi. Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik.

Agar qaralayotgan funksiyalarning hammasi $f(-x) = -f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya **toq funksiya** deyiladi.

Toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik.

Ikkita juft funksiyaning yoki ikkita toq funksiyaning ko'paytmasi juft funksiya, juft va toq funksiyalarning ko'paytmasi toq funksiya.

Agar $f(x)$ funksiya $[-a; a]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda

⁹⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \quad (21.1)$$

Ammo x ni $-x$ bilan almashtirishda o'ng qismidagi birinchi integral bunday yoziladi:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(x)d(-x) = -\int_a^0 f(-x)dx = \int_0^a f(-x)dx.$$

Buning qiymatini (21.1) ga qo'ysak,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx, \text{ bundan}$$

$$f(x) \text{ funksiya toq bo'lsa, } \int_0^a (f(x) - f(x))dx = 0$$

$$f(x) \text{ funksiya juft bo'lsa, } \int_0^a (f(x) + f(x))dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Bu natijalarndan Fure koefitsientlarini hisoblashda foydalanamiz.⁹⁶

2. Juft va toq funksiyalarni Fur'e qatori.

$f(x)$ funksiya davri 2π , $[-\pi; \pi]$ kesmada Direxle shartini qanoatlantiradigan juft funksiya bo'lsin. Uning Fure qatori koefitsientlari uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0$$

Shunday qilib, juft funksiyaning Fure qatorida sinuslar qatnashmaydi, juft funksiyaning Fure qatori faqat kosinuslarni o'z ichiga oladi va bunday ko'rinishda bo'ladi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx \quad (21.2)$$

bundan

⁹⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

Endi $f(x)$ davri 2π $[-\pi; \pi]$ kesmada Dirixle shartlarini qanoatlantiradigan toq funksiya bo'lsin. Uning Fure qatori koefitsientlari uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

SHunday qilib, toq funksiyaning Fure qatorida ozod had va kosinusli hadlari qatnashmaydi. Toq funksiyaning Fure qatorida faqat sinusli hadlarini o'z ichiga oladi va bunday uo'rinishda bo'ladi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (21.3)$$

bundan

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

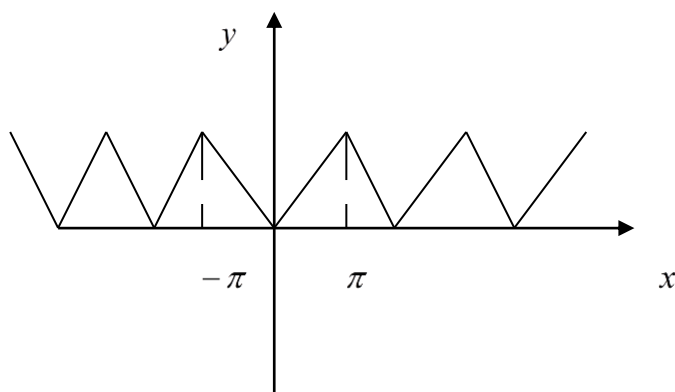
CHiqarilgan formulalar. Aslida har qanday davriy funksiya ham juft va toq funksiya bo'lavermasligi ravshan bo'lsa-da, juft va toq funksiyalarning Fure koefitsientlarini hisoblashni soddalashtirish imkonini beradi.

Toq funksiya uchun faqat sinuslardan iborat ekan $a_0 = 0$, $a_k = 0$.⁹⁷

Misol: Davri 2π ga teng.

$$f(x)|x| = \begin{cases} -x & \text{agar } x \in (-\pi; 0) \\ x & \text{agar } x \in [0; \pi) \end{cases}$$

⁹⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010



Funksiya juft Dirixle shartini qanoatlantiradi.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} (\cos k\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} [(-1)^k - 1] =$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{k^2\pi}, & \text{агар } k \text{ тоқ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } k \text{ жуп бўлса} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

$$x=0: \quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right)$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$$

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right) + \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \dots \right)$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right)$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S$$

$$\frac{3S}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

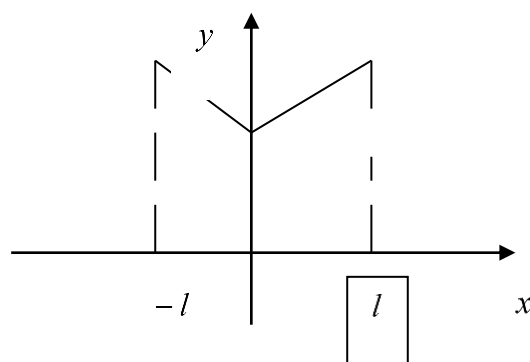
$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Yarim davrda berilgan funksiyalar uchun Fur'e qatori.

Ko'pincha $[0; l]$ kesmada berilgan $f(x)$ funksiyani sinuslar bo'yicha yoki kosinuslar bo'yicha qatorga yoyish masalasi talab etiladi.

$f(x)$ funksiyani kosinuslar bo'yicha qatorga yoyish uchun funksiyani juftligiga $[0; l]$ kesmadan $[-l; l]$ kesmaga davom ettiriladi.

(1- shakl) u holda davom ettirilgan juft funksiya uchun Fur'e qator faqat kosinuslarni o'z ichiga oladi.



1-chizma

Agar $f(x)$ funksiyani qatorga sinuslar bo'yicha yoyishni istasak u holda funksiyani toqligiga $[0; l]$ kesmadan $[-l; l]$ kesmaga davom ettiramiz bunda $f(0) = 0$ deb olishimiz kerak .

Davom ettirilgan toq funksiya uchun Fur'e qatori faqat sinuslarni o'z ichiga oladi.⁹⁸

$$(-l \leq x < 0), \quad f(x) = -f(-x)$$

$[0; l]$ segmentda berilgan funksiyani kosinuslar qatoriga yoyish.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$[0; l]$ segmentda berilgan $f(x)$ funksiyani sinuslar qatoriga yoyish.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

1 – Misol: $f(x) = x^2$, $[0, l]$ da sinuslar bo'yicha qatorga yoying.

$f(x)$ funksiyani $[-l, 0]$ ga toq davom

ettirish va undan keyingi davriy davom ettirish $\uparrow$ ga

Demak funksiya toq u Dirixli shartlarini qanoatlantiradi. $a_0 = 0$, $a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l -\frac{l}{\pi k} x^2 \cdot \cos \frac{\pi k x}{l} \Big|_0^l + \frac{2l^2}{(\pi k)^2} x \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \Big|_0^l + \frac{2l^2}{(\pi k)^3} \cos \frac{\pi k x}{l} \Big|_0^l =$$

$$\frac{2}{l} \left[-\frac{l^3}{\pi k} \cos \pi k + \frac{2l^3}{(\pi k)^3} (\cos k\pi - 1) \right] - \frac{2l^3}{l} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{2}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) \right]$$

$$f(x) = \frac{2l^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} + \frac{2}{\pi^2 k^3} ((-1)^k - 1) \right] \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$$

2- Misol: $f(x) = x$ $[0, \pi]$ da sinuslar bo'icha qatorga yoying.

⁹⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$x = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

3 – Misol: $f(x) = x$ $[0, \pi]$ da kosinuslar qatoriga yoying.

Bu funksiyani juft davom ettirib $f(x) = |x|$ $-\pi \leq x \leq \pi$ da

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

21-MAVZU FURE QATORI. KOMPLEKS SHAKLDAGI FURE QATORI. PARSEVAL TENGLIGI. FURE INTEGRALI. TOQ VA JUFT FUNKSIYALAR UCHUN FURE INTEGRALI. FURENING KOSINUS VA SINUS ALMASHTIRISHLARI

Reja.

1. Kompleks shakldagi Fure qatori
2. Fure integrali.
3. Fure integralining kompleks shakli.
4. Furening kosinus va sinus almashtirishlari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Kompleks shakldagi Fure qatori, Fure integrali, juft funksiyalarning Fure integrali, toq funksiyalarning fure integrali, Fure integralining kompleks shakli, kosinus almashtirishi, sinus almashtirishi.

Fur'e qatorlarini kompleks shaklda tasvirlash ham fure integralini tasvirlagandek amalga oshiriladi. $f(x)$ funksiyaning Fur'e qatoriga ega bo'laylik:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (21.1)$$

bunda

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned} \quad (21.2)$$

Eylerning

$$\text{Ma'lumki: } \cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \quad \text{formulalar bo'yicha}$$

almashtirishlarni bajaramiz. Bu holda (21.1) ni bunday yozamiz:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} - i b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right) \quad (21.3)$$

$c_k = a_k - ib_k$ belgilashni kiritamiz. U holda (21.2) formulalarga ko'ra

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (21.4)$$

Agar (21.4) formulada k ni $-k$ bilan almashtirilsa, undan $\overline{c_k} = a_k + ib_k$ kompleks son kelib chiqadi. SHu sababli bunday belgilash mumkin:

$$\overline{c_k} = c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx. \quad (21.5)$$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx$ bo'lgani uchun uni $k=0$ da a_k ning (21.2) formulasidan topish

mumkin. Shu sababli $a_0 = c_0$ deb yozish mumkin. Kiritilgan almashtirishlarni hisobga olib (21.3) qatorni ushbu

$$f(x) = \frac{1}{2} c_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx})$$

yoki qisqaroq $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}$ ko'rinishda yozish mumkin, bunda

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \text{ SHuning o'zi fure qatorning kompleks shaklidir.}^{99}$$

Topilgan natijani kompleks shaklidagi Fure integrali bilan taqqoslaymiz. Unda c_k sonlar

$$c(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$$

Funksiya bilan almashinadi, bu funksiya α bilan birgalikda o'zgaradi,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \text{ yig'indi esa quyidagi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

integral bilan almashinadi. Kompleks shakildagi integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right] e^{i\alpha x} d\alpha$$

yoki qisqacha

⁹⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha,$$

bunda

$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$, kabi yoziladi. α to'liq son deyiladi. $c(\alpha)$ funksiya spektral zichlik yoki spektral funksiya deb ataladi.

Parseval tengligi.

Davriy funksiyaning Fur'e qatori koeffitsientlarini bilgan holda bir davrida uning kvadratining o'rtacha qiymatini aniqlash mumkin.

$f(x)$ funksiya $[-\pi; \pi]$ da berilgan bo'lsin ya'ni $f(x+2\pi) = f(x)$ uning Fur'e qatori

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21.6)$$

(1) tenglikni kvadratga ko'taramiz.

$$f^2(x) = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_0 a_n \cos nx + a_0 b_n \sin nx + a_n^2 \cos^2 nx + 2a_n b_n \cos nx \sin nx + b_n^2 \sin^2 nx)$$

Buni $[-\pi; \pi]$ da integrallaymiz.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_0 a_n \cos nx + a_0 b_n \sin nx + a_n^2 \cos^2 nx + 2a_n b_n \cos nx \sin nx + b_n^2 \sin^2 nx) dx = \\ &= \frac{a_0^2}{4} 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \pi + b_n^2 \pi) \end{aligned}$$

bundan $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ Parseval tengligini hosil qilamiz.¹⁰⁰

Fur'e integrali

$f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. $x \in (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan va shu intervalda absolyut integrallanuvchi bo'lsin ya'ni

¹⁰⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = Q \quad (21.7)$$

xosmas integral mavjud bo'lsin. Qoralayotgan funksiya shunday bo'lsinki u ixtiyoriy $(-l; l)$ oraliqda Fur'e qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{k\pi x}{l} + b_n \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (21.8)$$

bunda
$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \quad (21.9)$$

(agar a_k ning formulasida $k=0$ deb olinsa, a_0 koeffitsient hosil bo'ladi).

(3) larni (2) ga qo'yib, quyidagini topamiz.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \right) \cos \frac{k\pi x}{l} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \right) \sin \frac{k\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left[\cos \frac{k\pi t}{l} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} + \sin \frac{k\pi t}{l} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \right] dt \text{ yoki} \\ f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \frac{k\pi(t-x)}{l} dt \quad (21.10) \end{aligned}$$

Endi l ni cheksiz kattalashtiramiz va bunda (21.9) formula nimaga o'tishini tayinlangan x da qaraymiz. SHu maqsadda bunday qilib olamiz:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \Delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{l}$$

Endi bizni qiziqtirayotgan (4) yig'indi quyidagi ko'rinishga keladi.

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \alpha_k(t-x) dt \right) \Delta\alpha_k \quad (21.11)$$

Bu ifodaning o'ng qismidagi birinchi hadi $l \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Haqiqatdan,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt < \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{2l} Q \rightarrow 0,$$

bunda $f(x)$ funksiyaning absolyut integrallanuvchi bo'lishining (21.7) shartidan foydalanilgan.

(21.11) ifodaning o'ng qismidagi ikkinchi had α ga bog'liq

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha(t-x) dt.$$

funksiyaning $[0, \infty)$ oraliqda tuzilgan integral yig'indisini eslatadi. SHuning uchun $l \rightarrow \infty$ da (21.11) ikki karrali integralga o'tishini kutish tabiiy:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha(t-x) dt. \quad (21.12)$$

Bu formulaning o'ng qismida turgan ifoda $f(x)$ funksiya uchun Fure integrali deyiladi. Bu tenglik $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtalarning hammasida o'rinli. Uzulish nuqtalarida esa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos \alpha(t-x) dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

tenglik bajariladi, ya'ni uning chap va o'ng limitining o'rta arifmetik qiymatiga teng bo'ladi.¹⁰¹

Agar ayirmaning kosinusi formulasi

$\cos \alpha(t-x) = \cos \alpha t \cdot \cos \alpha x + \sin \alpha t \cdot \sin \alpha x$ dan oydanilrsa, u holda Furening integral formulasi (6) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cdot \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cdot \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha \quad (21.13)$$

$$f(x) = \int_0^\infty (a(\alpha) \cos \alpha x + b(\alpha) \cdot \sin \alpha x) d\alpha \quad (21.14)$$

bunda

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cdot \cos \alpha t dt, \quad b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cdot \sin \alpha t dt.$$

Fure qatri bilan o'xshashlikni payqash oson: yig'indi belgisi integral belgisi bilan almashdi, butun sonli k parametr o'rniga uzluksiz o'zgaruvchi α parametri keladi, $a(\alpha)$ va

¹⁰¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$b(\alpha)$ funksiyalar Fur'e koeffitsientlarini eslatadi. $f(x)$ - funksiya juft yoki toq bo'lgan hollarda (7) Fur'e integral formulasini ng xususiy hollarini qaraymiz. $f(x)$ - juft funksiya bo'lsin, u holda $f(t)\cos\alpha t$ ham juft funksiya bo'ladi, $f(t)\sin\alpha t$ esa toq funksiya, biz quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t d\alpha.$$

(7) formula juft funksiya uchun bunday ko'rinishni oladi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cdot \cos \alpha x d\alpha \quad (21.15)$$

Endi $f(x)$ - toq funksiya bo'lsin, u holda $f(t)\cos\alpha t$ toq funksiya bo'ladi, $f(t)\sin\alpha t$ esa juft funksiya bo'ladi, biz quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt.$$

Toq funksiya uchun (1) formula bunday ko'rinishni oladi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \cdot \sin \alpha x d\alpha \quad (21.16)$$

Fur'e almashtirish.

$f(t)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (21.17)$$

funksiya $f(t)$ funksiyaning Fur'e almashtirishi deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya uchun kompleks shaklda olingan Fur'e integral formulasi o'rinli bo'lsa, u holda binoan:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

bu funksiya $F(\alpha)$ funksiya uchun Fur'ening teskari almashtirishi bo'ladi. $F(\alpha)$ funksiyaning integral tenglamaning echimi sifatida qarash mumkin ($f(x)$ funksiya berilgan, $F(\alpha)$ funksiya izlanadi).¹⁰²

Fur'ening sinus va cosinus almashtirishlari.

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt \quad (21.18)$$

funksiya $f(t)$ funksiya uchun Fur'ening sinus-almashtirishlari deyishga kelishib olamiz. – formuladan

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha$$

ya'niy $f(x)$ funksiya o'z navbatida $\Phi(\alpha)$ funksiya uchun sinus almashtirishi bo'ladi. Boshqach aytganda f va Φ funksiyalar o'zaro sinus almashtirishlardir.

Shunga o'xshash,

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt \quad (21.19)$$

funksiya $f(t)$ funksiya uchun Fur'ening cosinus-almashtirishlari deyimiz. Agar $f(x)$ funksiya uchun Fur'ening integral formulasi o'rinli bo'lsa, u holda – formuladan:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$$

ya'niy $f(x)$ funksiya o'z navbatida $F(\alpha)$ funksiya uchun cosinus-almashtirishi bo'ladi. Boshqach aytganda f va F funksiyalar o'zaro cosinus-almashtirishlardir.

– funksiyaning integral tenglamaning echimi sifatida qarash mumkin ($f(x)$ funksiya berilgan, $\Phi(\alpha)$ funksiya izlanadi). – funksiyaning esa integral tenglamaning echimi deb qarash mumkin ($f(x)$ funksiya berilgan, $F(\alpha)$ funksiya izlanadi).

Misol. Quyida berilgan funksiyaning Fur'ye integrali ko'rinishida yozing.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ da} \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = 1 \text{ da} \\ 0, & x < 0, x > 1 \text{ da} \end{cases}$$

¹⁰² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Yechish. Bu funksiya silliq qismlardan iborat bo'lgani uchun bo'lakli silliq bo'ladi, $y = 0, (-\infty; 0), y = 1, (0; 1), y = 0, (1; \infty)$ va $x = 0, x = 1$ nuqtalarda birinchi tur uzilish ega.

Bu funksiya sonlar o'qining barcha nuqtalarida absolyut integrallanuvchidir, $[0; 1]$ kesmadan tashqarida uning qiymati nolga teng. Demak, bu funksiyaning butun sonlar o'qi bo'yicha integrali $[0; 1]$ kesma bo'yicha integraliga keladi. Natijada bu funksiyaning Furiye integrali ko'rinishda ifodalash mumkin bo'ladi.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_0^1 1 \cdot \cos \alpha(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha(t-x)}{\alpha} \Big|_0^1 d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha(1-x) + \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Funksiya $x = 0, x = 1$ nuqtalarda uzilishga ega bo'lgani uchun, bu integral uzilish nuqtalarida o'zgarmaydi. Uzilish nuqtalarida

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi.

Xususiylashtirishda $x = 0$ bo'lganda

$$f(x) = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$$

bo'ladi. Bundan $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$ kelib chiqadi.

Nazorat uchun savollar

1. Furiye qatorining kompleks shakli qanday?
2. Furiye integrali formulasi qanday?
3. Furiye integrali koeffitsientlarining formulalari qanday?
4. Furiye integrali qaysi nuqtalarda o'rinli?
5. Juft funksiyalar uchun Furiye integrali qanday bo'ladi?
6. Toq funksiyalar uchun Furiye integrali qanday bo'ladi?
7. Furiye integralining kompleks shakli qanday bo'ladi?
8. Furiyening kosinus almashtirishi deganda nimani tushunasiz?
9. Furiyening sinus almashtirishi nima?

22- MAVZU IKKI KARRALI INTEGRAL TUSHINCHASIGA OLIB KELADIGAN MASALALAR. TA'RIFI VA XOSSALARI. IKKI KARRALI INTEGRALNING MAVJUDLIGI HAQIDAGI TEOREMA

REJA:

1. To'rtburchaklarda ikki karrali integrallar.
2. Ikki o'lchovli integralning geometrik va mexanik ma'nosi.
3. Ikki o'lchovli integralning xossalari.
4. O'rta qiymatdagi haqidagi teorema.
5. Integralning chegaralanganligi haqidagi teorema.

Tayanch iboralar : Ikki o'lchovli funksiya uchun integral yig'indi, yuza elementi, ikki o'lchovli integral, integrallash sohasi

22.1 To'rtburchaklar ustida ikki karrali integral

Yopiq to'rtburchak $B = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ da aniqlangan va uning ustidan chegaralangan $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani ko'rib chiqaylik. Biz f ning silindroidi deb B orasidagi uch-o'lchovli $C(f; B)$ sohaga aytamiz va f ning grafigini

$$C(f; B) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, 0 \leq z \leq f(x, y) \text{ yoki } f(x, y) \leq z \leq 0\},$$

Chizmasini 22.1 da ko'rishingiz mumkin.

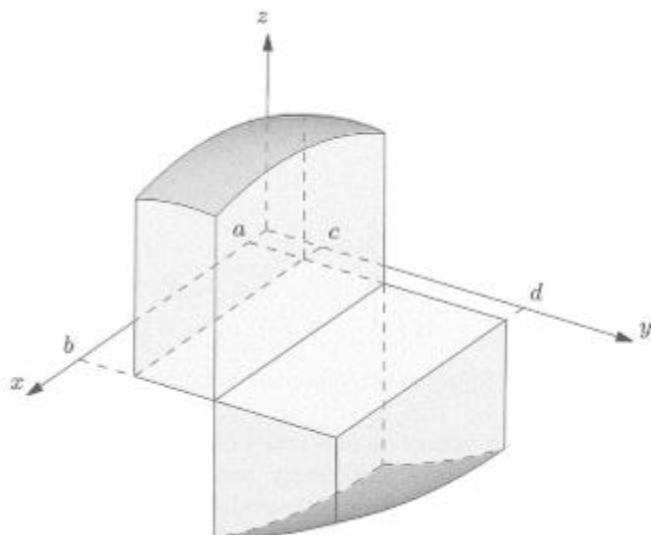
Agar f ma'lum talablarni qondirsa, f ning silindroidiga f ning B ustida olingan ikki karrali integral qiymatini bog'lashimiz mumkin. f musbat bo'lgan holatda, bu raqam soha hajmini ifodalaydi. Xususan, silindroid oddiy bir turdagi shakl bo'lsa (masalan, parallelepiped, prizma va hokazo), bu uning hajmi uchun odatiy ifodani beradi. Funksiyaning ikki karrali integralini qurishning ko'pgina usullari bor; Biz buni oldingi bo'limlarda 1 o'lchov uchun ko'rib chiqilgan Riemann usuli orqali tushuntirib beramiz.¹⁰³

Keling endi, $[a, b]$ va $[c, d]$ ning $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ va $\{y_0, y_1, \dots, y_q\}$ tartiblangan nuqtalari bilan bog'langan hosilaviy qismlarini ko'rib chiqaylik.

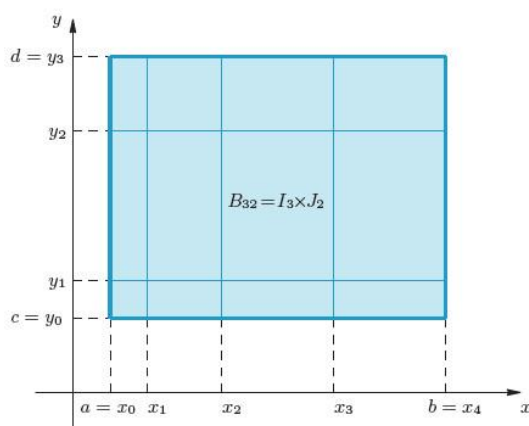
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{q-1} < y_q = d$$

$$I = [a, b] = \bigcup_{h=1}^p I_h = \bigcup_{h=1}^p [x_{h-1}, x_h], \quad J = [c, d] = \bigcup_{k=1}^q J_k = \bigcup_{k=1}^q [y_{k-1}, y_k].$$

¹⁰³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010



Chizma 22.1



Chizma 22.2 B to'rtburchak bo'linmasi

B to'rtburchak $B_{hk} = I_h \times J_k$ dan olingan $p \cdot q$ dan qurilgan; biz B ning bo'linmasi yoki qismini shunday qurdikki, bunda $[a, b]$ va $[c, d]$ qismlar ning mahsuli $\mathcal{D} = \{B_{hk} : h = 1, \dots, p, k = 1, \dots, q\}$ (Chizma 22.2).

$$m_{hk} = \inf_{(x,y) \in B_{hk}} f(x,y) \quad \text{and} \quad M_{hk} = \sup_{(x,y) \in B_{hk}} f(x,y)$$

ni

kiriting va f ning B dagi $\mathcal{D}$ bo'linma uchun quyi va yuqori qismlari yig'indilarini aniqlang:

$$s = s(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^q \sum_{h=1}^p m_{hk} (x_h - x_{h-1}) (y_k - y_{k-1}),$$

$$S = S(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^q \sum_{h=1}^p M_{hk} (x_h - x_{h-1}) (y_k - y_{k-1}).$$

(22.1)

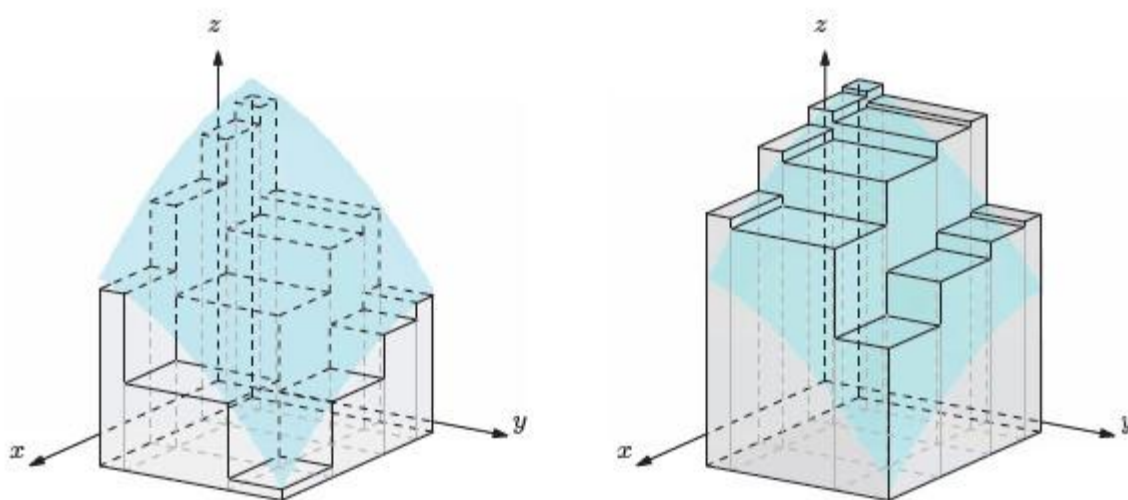
f B da chegaralangan bo'lsa, D ning har biri bo'linmasi uchunshunday o'zgarmas m va M mavjudki,

$$m(b-a)(d-c) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq M(b-a)(d-c).$$

Quyidagi miqdorlarni aniqlaymiz,

$$\overline{\int_B} f = \inf_D S(D, f) \quad \text{and} \quad \underline{\int_B} f = \sup_D s(D, f),$$

(22.2)



Chizma 22.3. Quyi (chap) va yuqori (o'ng) yig'indi

Ular f ning B dagi **yuqori integral** va **quyi integrali** deyiladi. Bir-o'lchovli sohadagi kabi, bunda ham quyidagini aniqlash murakkab emas:

$$\underline{\int_B} f \leq \overline{\int_B} f.$$

Ta'rif 22.1 $B = [a, b] \times [c, d] = I \times J$ da chegaralangan f funksiya **Riemann** integrallanuvchi deyiladi, agar

$$\underline{\int_B} f \leq \overline{\int_B} f.$$

bo'lsa.¹⁰⁴

Bu qiymat f ning B da **aniqlangan ikki karrali integrali deyiladi**, va quyidagi belgilardan biri bilan belgilanadi:

$$\int_B f, \iint_B f, \int_B f(x, y) dx dy, \int_J \int_I f(x, y) dx dy, \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

¹⁰⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

22.2. Ikki o'lchovli integral

Ikki o'lchovli integral tushunchasi matematik analizning muhim tushunchalaridan bo'lib uning yordamida yuzalar, jismning massasi, hajmi, og'irlik markazi, inersiya momentiva shunga o'xshash kattaliklarni aniqlash mumkin.

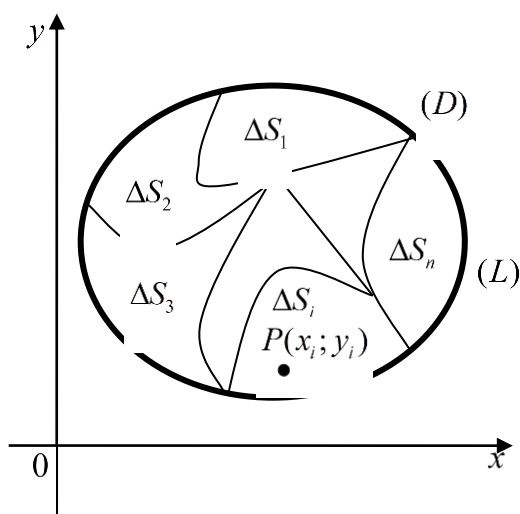
Bir o'zgaruvchili funktsiyaning differensial hisobi tushunchalari va usullarini (Yo.U.Soatov Oliy matematika 1-tom, 7-bob) istalgan sondagi o'zgaruvchining funktsiyasi uchun joriy qilish mumkinligi o'rganilgan edi. Integral hisobning asosiy g'oyalarini ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarga ham ko'chirish mumkin, bu eng avval integralning aniq turdagi yig'indisining limiti ekanligi g'oyasiga tegishli.

Shuning uchun Oxy tekisligida L chiziq bilan (yoki bir necha chiziq bilan) chegaralangan yopiq (D) sohani qaraymiz. Bu sohada $z = f(P) = f(x; y)$ uzluksiz funktsiya berilgan bo'lsin. Quyidagi amallarni bajaramiz:

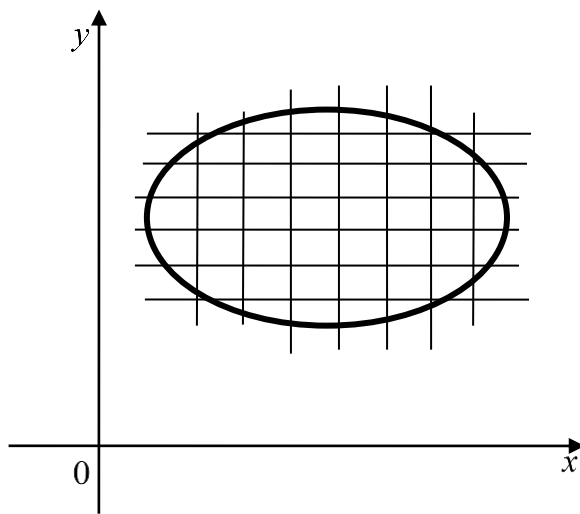
1) (D) sohani har qanday chiziqlar (22.4-shakl) bilan (xususiyl holda bu to'g'ri chiziqlar Ox va Oy o'qlariga parallel bo'lishi mumkin (22.5-shakl) n ta ixtiyoriy qismga bo'lamiz:

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_n$$

Bu qismlarni *elementar yuzalar* deb ataymiz.¹⁰⁵



22.4-chizma.



22.5-chizma

2) Har bir yuzachada bittadan $P_i(x_i; y_i)$ nuqta olamiz, natijada n nuqtaga ega bo'lamiz.

$$P_1(x_1; y_1), P_2(x_2; y_2), P_3(x_3; y_3), \dots, P_i(x_i; y_i), \dots, P_n(x_n; y_n)$$

¹⁰⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

3) Tanlab olingan $P_i(x_i; y_i)$ nuqtalarda $z = f(P) = f(x; y)$ funksiyaning qiymatlarini hisoblab quyidagiga kelimiz:

$$f(P_1) = f(x_1; y_1), f(P_2) = f(x_2; y_2), \dots, f(P_i) = f(x_i; y_i), \dots, f(P_n) = f(x_n; y_n).$$

4) Ushbu ko'rinishdagi ko'paytmani tuzamiz: $f(P_i) \cdot \Delta S_i = f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$

5) Bu ko'paytmalardan tuzilgan yig'indi: $\sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$

Bu yig'indiga $z = f(P) = f(x; y)$ funksiyaning **(D)** sohadagi integral yig'indisi deyiladi. Bu integral yig'indi bir xil **n** da **(D)** sohani qismlarga bo'lish usuliga va har bir qismda nuqtalarni tanlashga ham bog'liq.

Shunday qilib, tayinlangan **n** da integral yig'indilar ketma-ketligiga ega bo'lamiz. $n \rightarrow \infty$ da ΔS_i yuzachalar diametrlarining eng kattasi nolga intiladi deb faraz qilamiz (diametr- yuzachalarning bir-biridan eng uzoqlashgan nuqtalari orasidagi masofa). Quyidag itasdiq o'rinni:

22.2.- Teorema (mavjudlik haqidagi). Agar chegaralangan yopiq **(D)** sohada $z = f(P) = f(x; y)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda bu sohani qisman sohalariga bo'lishlar sonini ΔS_i yuzalar diametrlarining eng kattasi nol'ga intiladigan qilib kattalashtirilganda ($n \rightarrow \infty$)

$$\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta S_i \quad (22.3)$$

ko'rinishdagi integral yig'indining limiti mavjud bo'ladi.¹⁰⁶

Bu limit **(D)** sohani ΔS_i yuzalarga bo'lish usuliga ham va har bir qismida $P_i(x_i; y_i)$ nuqtani tanlash usuliga ham bog'liq bo'lmaydi. Bu limit qiymatga $z = f(P) = f(x; y)$ funksiya dan **(D)** soha bo'yicha olingan **ikki o'lchovli iintegral** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{\max \text{diam} \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i = \lim_{\max \text{diam} \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta S_i = \iint_{(D)} f(P) dS = \iint_{(D)} f(x; y) dS. \quad (22.4)$$

bu erda **(D)** – integrallash sohasi, $f(x; y)$ - integral ostidagi funksiya, x, y - lar integrallash o'zgaruvchilari, dS yuza elementi deyiladi. Ikki o'lchovli integral o'qlariga

¹⁰⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

parallel to'g'ri chiziqlar bilan tomonlari Δx_i , Δy_i ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarga bo'lish mumkin (22.5-shakl), bunda $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

Ikki o'lchovli integral ta'rifiga ko'ra:

$$\lim_{\max diam \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i = \iint_{(D)} f(x; y) dS = \iint_{(D)} f(x; y) dx dy \quad (22.5)$$

22.3. Ikki o'lchovli integralning geometrik va mexanik ma'nosi.

22.3.-ta'rif. (D) soha, tenglamasi $z = f(x; y)$ dan iborat σ sirt, yo'naltiruvchisi z , hamda yasovchilari OZ o'qqa parallel bo'lgan silindrik sirt bilan chegaralangan jism **silindrik jism** deyiladi.¹⁰⁷

Agar (D) sohada $f(x; y) \geq 0$ bo'lsa, uholda har bir $f(P_i) \cdot \Delta S_i = f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$ qo'shiluvchini asosi ΔS_i dan, balandligi esa $f(P_i) = f(x_i; y_i)$ dan iborat kichkina silindrik jismning hajmi sifatida geometrik tasvirlash mumkin (22.6-shakl). Bu holda

$$\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta S_i$$

Integral yig'indi ko'rsatilgan silindrik jismning hajmlari yig'indisidan, boshqacha aytganda, biror zina poyasimon silindrik jismning hajmidan iborat bo'ladi. (D) soha bo'yicha $z = f(P) = f(x; y)$ funksiyadan olingan ikki o'lchovli integral quyidan (D) soha, yuqoridan esa $z = f(P) = f(x; y)$ sirt bilan chegaralangan silindrik jismning V hajmiga teng bo'ladi:

$$V = \iint_{(D)} f(P) dS = \iint_{(D)} f(x; y) dS, \quad (22.6)$$

bunda (D) soha $z = f(P) = f(x; y)$ sirtning Oxy tekislikdagi proeksiyasidir. Bu ikki o'lchovli integralning geometrik ma'nosidan iborat.

Agar (D) sohada integral ostifunksiya $f(x; y) \equiv 1$ bo'lsa, uholda ikki o'lchovli integralning qiymati son jihatdan integrallash sohasi (D) ning S yuziga teng bo'ladi:

$$S = \iint_{(D)} dS = \iint_{(D)} dx dy \quad (22.7)$$

Agar (D) sohada integral ostifunksiya $\rho = f(P) = f(x; y)$ massa taqsimlanishining zichligi bo'lsa, u holda ikki o'lchovli integral D plastinka joylashgan modda massasi m ni beradi:

¹⁰⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$m = \iint_{(D)} f(P) dS = \iint_{(D)} f(x; y) dS \quad (22.8)$$

Ikki o'ldhovli integralning **mexanik** ma'nosi shundan iborat.

22.4. Ikki o'ldhovli integralning xossalari:

$$1) \iint_{(D)} k \cdot f(x, y) dx dy = k \cdot \iint_{(D)} f(x; y) dx dy ,$$

$$2) \iint_{(D)} (f(x, y) \pm \varphi(x; y)) dS = \iint_{(D)} f(x; y) dS \pm \iint_{(D)} \varphi(x; y) dS$$

$$3) D = D_1 + D_2 \text{ bo'lsa, } \iint_{(D)} f(x, y) dS = \iint_{(D_1)} f(x, y) dS + \iint_{(D_2)} f(x, y) dS$$

$$4) \text{ a) Agar } f(x; y) \geq 0 \rightarrow \iint_{(D)} f(x; y) dS \geq 0, \text{ b) Agar } f(x; y) \leq 0 \rightarrow \iint_{(D)} f(x; y) dS \leq 0.$$

$$5) f(x, y) \geq \varphi(x; y) \rightarrow \iint_{(D)} f(x, y) dS \geq \iint_{(D)} \varphi(x; y) dS.$$

22.5. O'rta qiymat haqidagi teorema

Agar funksiya yopiq chegaralangan **(D)** sohada uzluksiz bo'lsa, u holda bu **(D)** sohada shunday $P_0(x_0; y_0)$ nuqta topiladiki, **(D)** soha bo'yicha olingan ikki o'ldhovli integral integral ostidagi funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini **(D)** integrallash sohasining yuzi **S** ga ko'paytirilganiga teng (22.6-shakl) , ya'ni

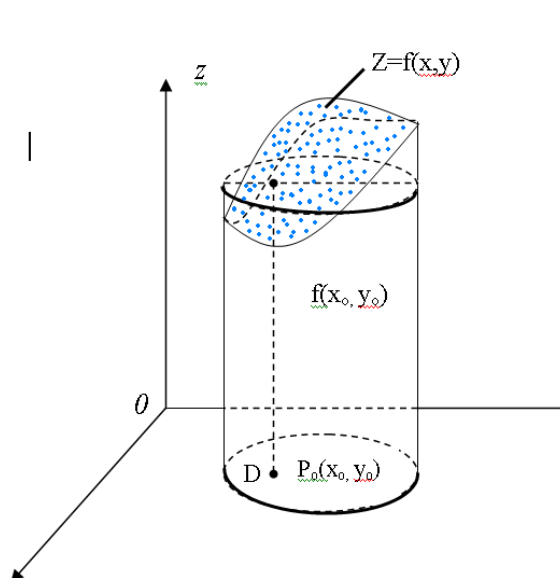
$$\iint_{(D)} f(x, y) dS = f(x_0; y_0) \cdot S \quad (22.9)$$

$f(x_0; y_0)$ qiymat $f(x, y)$ funksiyaning **(D)** sohadagi **o'rta qiymati** deyiladi. ($S = S(D)$) va quyidagi formuladan topiladi.¹⁰⁸

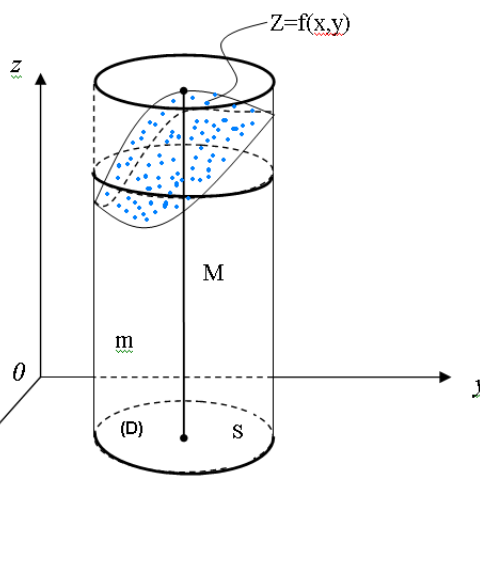
$$f(x_0; y_0) = \frac{\iint_{(D)} f(x, y) dS}{\iint_{(D)} dx dy} \quad (22.10)$$

¹⁰⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Bu formuladan amaliy masalalar, ya'ni bir jinsli bo'lmagan jismlarning o'rtacha zichligini topishda, harorati har hil bo'lgan jismlarning o'rtacha haroratini hisoblashda yoki o'rtacha qarshilik, o'rtacha issiqlik sig'imi kabi fizik xarakteristikalarini hisoblashda foydalaniladi.¹⁰⁹



22.6-chizma



22.7-chizma

22.6. Integralning chegaralanganligi haqidagi teorema

Agar $f(x; y)$ funksiya yopiq chegaralangan (D) sohada uzluksiz hamda M va m lar funksiyaning shu sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari bo'lsa, u holda ikki o'lchovli integral, funksiyaning eng kichik qiymatining integrallash sohasi (D) ning S yuzasiga ko'paytmasi bilan eng katta qiymati M ning o'sha yuzaga ko'paytmasi orasida yotadi (ya'ni funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda ikki o'lchovli integral ham chegaralangandir)(22.7-shakl):

$$m \cdot S \leq \iint_{(D)} f(x, y) dS \leq M \cdot S \quad (22.11)$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning integral yig'indisi qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Ikki o'lchovli integralning mavjudligi haqidagi teoremani ayting.
3. Ikki o'lchovli integralning geometrik ma'nosi nima?
4. Ikki o'lchovli integralning mexanik ma'nosini ayting.
5. Ikki o'lchovli integralning xossalari nima?
6. O'rta qiymatdagi haqidagi teoremani ayting.
7. O'rta qiymat formulasining tatbiqlarini ayting..
8. Integralning chegaralanganligi haqidagi teoremani ayting.

¹⁰⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

23-MA'RUZA. DEKART KOORDINATALAR SISTEMASIDA IKKI KARRALI INTEGRALNI HISOBLASH. IKKI KARRALI INTEGRALLARDA O'ZGARUVCHILARNI ALMASHTIRISH. QUTB KOORDINATA SISTEMASIDA IKKI KARRALI INTEGRAL

Reja:

1. Dekart koordinatalar sistemasida ikki o'lchovli integralni hisoblash. .
2. Ikki karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.
3. Qutb koordinatalar sistemasida ikki karrali integral.
4. Karrali integrallarda integrallash tartibini almashtirish.

Tayanch iboralar: Karrali integrallar, muntazam soha, yakobian, ikki karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish

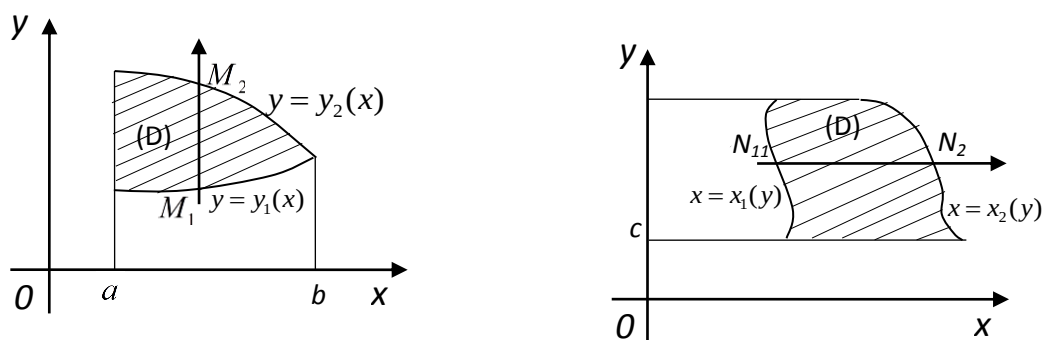
23.1.Dekart koordinatalar sistemasida ikki o'lchovli

integralni hisoblash.

Bu bo'lim bir o'lchovli integrallar uchun almashtirish usuliga o'xshagan analogni ko'rib chiqish imkoniyatini beradi.

Bu umumlashtirish, muhim hisoblash vositasini ifodalaydi, bundan tashqari tekislikdagi almashtirishlar Yakobian determinantlarini tushunishga muqobil yo'lni o'rgatadi.

Oxy tekisligida yotuvchi (D) sohani koordinata o'qlaridan biriga masalan Oy o'qqa parallel bo'lgan va sohaning ichki nuqtasidan o'tadigan har qanday to'g'ri chiziq uning chegarasini N_1 va N_2 nuqtada kesib o'tadigan qilamiz (23.1-shakl).¹¹⁰



23.1-chizma

¹¹⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Qaralayotgan holda (D) soha $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan, bunda

$$y_1(x) \leq y_2(x), \quad a < b$$

bo'lib, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz deb faraz qilamiz. Bunday sohani Oy o'q yo'nalishida muntazam soha deb ataymiz.

23.1-Ta'rif. (D) sohani Oy o'qiga parallel ixtiyoriy to'g'ri chiziq faqat ikkita nuqtada kesib o'tsa, hamda sohaga kirish va chiqish konturlari faqat bittadan tenglama bilan berilgan bo'lsa, bu soha Oy o'qi bo'yicha **muntazam soha** deyiladi.¹¹¹

Ox o'q yo'nalishida muntazam soha ham shu singari aniqlanadi.

23.1-shaklda Ox , Oy o'qlar yo'nalishida muntazam (D) soha ko'rsatilgan.

23.2-Mavjudlik teoremasi. $z = f(P) = f(x, y)$ uzluksiz funksiyaning (D) to'g'ri soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integral funksiyaning o'sha (D) soha bo'yicha olingan **ikki karrali integraliga** teng, ya'ni

$$I_{(D)} = \iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy \right) dx \quad (23.1)$$

Bu integralni hisoblash uchun dastlab qavs ichidagi integralda x ni o'zgarmas deb qarab, uni y bo'yicha integrallaymiz. Integrallash natijasida x ning uzluksiz funksiyasi hosil bo'ladi.¹¹²

$$\Phi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy \quad (23.2)$$

Bu integralni x bo'yicha a dan b gacha chegarada integrallaymiz:

$$I_{(D)} = \int_a^b \Phi(x) dx \quad (23.3)$$

Natijada biror o'zgarmas son hosil bo'ladi.

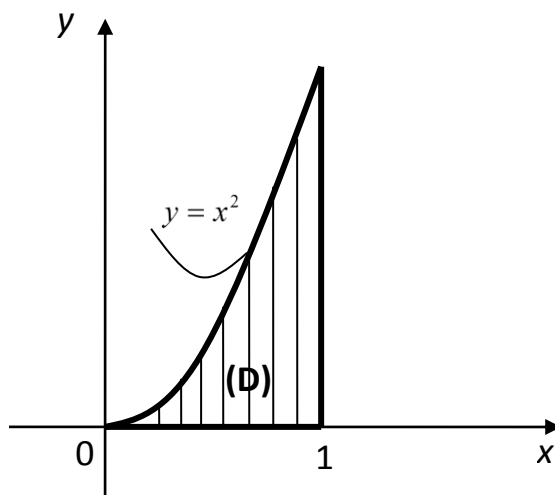
23.3-misol.

$$I_{(D)} = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

¹¹¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

¹¹² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Yechish. Bu misolimizda (D) deb $y=0$, $y=x^2$, $x=0$, $x=1$ chiziqlar bilan chegaralangan soha qaraladi(2-shakl).



23.2-chizma

Avval ichki integral(qavs ichidagi)ni hisoblaymiz:

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^6}{3},$$

Hosil bo'lgan funktsiyani 0 dan 1 gacha integrallaymiz:

$$I_{(D)} = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}$$

1) Agar (D) soha Oy o'qi bo'yicha muntazam bo'lsa,

$$(D): \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases} \iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy \quad (23.4)$$

2) Agar (D) soha Ox o'qi bo'yicha muntazam bo'lsa,

$$(D): \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases} \iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x; y) dx \quad (23.5)$$

3) Tashqi integralning chegaralari doim o'zgarmas bo'ladi. Agar soha nomuntazam bo'lsa uni muntazam sohalarga ajratiladi, keyin har bir soha bo'yicha hisoblanadi, keyin esa ularni jamlash kerak.

4) Agar soha to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lsa,

$$(D): \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad \iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x; y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x; y) dx \quad (23.6)$$

bo'ladi.¹¹³

23.4-misol. Berilgan sirtlar bilan chegaralangan Q jismning hajmini hisoblang:

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1.$$

Yechish. Berilgan jismni quyidagi ko'rinishda tasvirlash kerak:

$Q = \{(x, y, z): (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$, bunda D — soha Oxy tekislikning $y = x^2$ va $y = 1$ egri chiziqlari bilan chegaralangan, ya'ni $D = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.

Ikki o'lchovli integralning geometrik ma'nosiga ko'ra, Q jismning hajmi quyidagicha topiladi:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 \left(x^2(1 - x^2) + \frac{1}{3}(1 - x^6) \right) dx = \frac{88}{105}.$$

23.2. Ikki karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish

Oxy tekisligida yotuvchi (D) sohada $z = f(x; y)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy \quad (23.7)$$

mavjud. Faraz qilaylik, x va y koordinatalar yangi u va v o'zgaruvchilarning funksiyalari bo'lsin:

$$\begin{cases} x = x(u, v) = \varphi(u, v) \\ y = y(u, v) = \psi(u, v) \end{cases} \quad (23.8)$$

¹¹³ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Bu integralda u, v o'zgaruvchilarga o'tamiz.

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \iint_{(D^0)} f[x(u, v), y(u, v)] \cdot |I| du dv \quad (23.9)$$

formula o'rinli bo'ladi.

$$\text{Bu yerda } I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (23.10)$$

Bu determinant nemis matematigi Yakobi nomi bilan yakobian deb yuritiladi.¹¹⁴

23.3. Qutb koordinatalarida ikki karrali integral.

Dekart koordinatalaridagi x, y o'garuvchilar

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (23.11)$$

formulalar yordamida qutb koordinatalari r va φ ga almashadigan holni qaraymiz, bu amaliy tadbirlar uchun muhimdir.

r va φ o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cdot \cos \varphi, \quad (23.12)$$

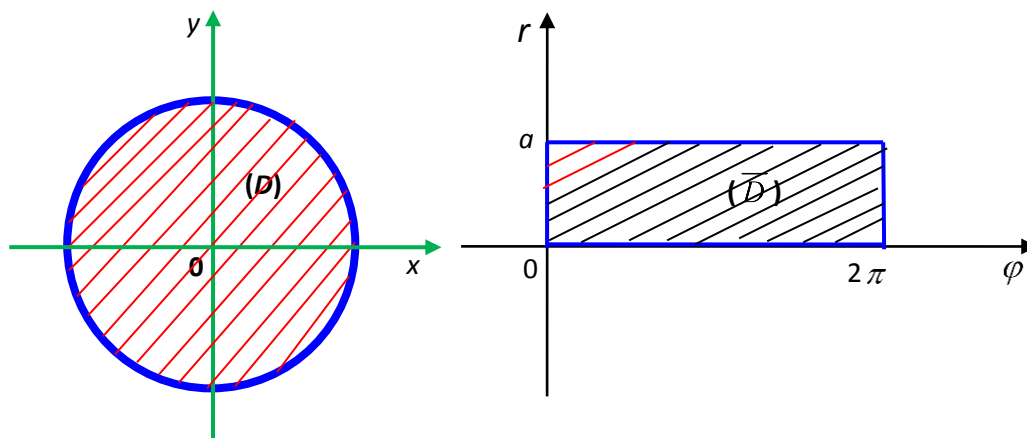
bundan

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}, \quad (23.13)$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi = r. \quad (23.14)$$

¹¹⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \iint_{(\bar{D})} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \quad (23.15)$$



23.3-chizma

(23.4)-formula ko‘pincha (D) soha markazi koordinatalar boshida bo‘lgan

$$x^2 + y^2 = a^2$$

doiradan iborat bo‘lganda qo‘llaniladi(3-shakl chapda).

Bu holda $(\bar{D})$ soha quyidagi

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlanadi.

(23.15) formula yordamida ikki o‘lchovli integralni hisoblash r va φ o‘zgaruvchilar bo‘yicha ikki o‘lchovli integralni hisoblashga keltiriladi (23.3-shakl o‘ngda).

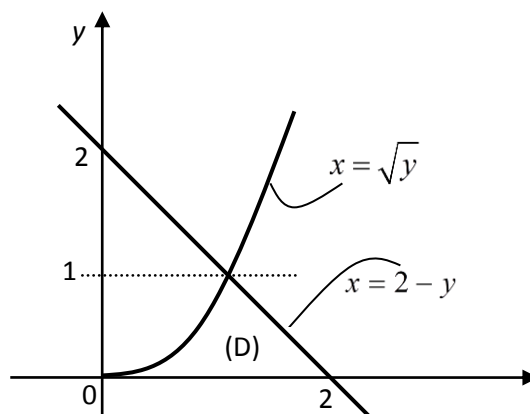
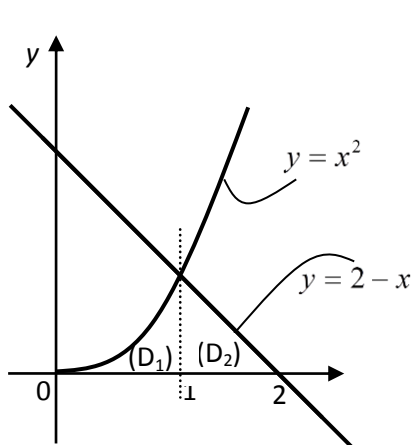
23.4. Karrali integrallarda integrallash tartibini almashtirish

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x; y) dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x; y) dx$$

Har bir masala yechimi (D) sohaga bog'liq ravishda bo'ladi.

23.5-misol. Berilgan D soha bo'yica integrallash chegarasini qo'ying va integrallash tartibini almashtiring.

$$\begin{cases} D: 0 \leq x \leq 2 \\ y = x^2, x + y = 2 \end{cases} \quad (D) = (D_1) + (D_2): \begin{cases} (D_1): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \\ (D_2): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x \end{cases}$$



$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x; y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x; y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x; y) dx$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ikki karrali integralda integrallash tartibini o'zgartiring:

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

2. Karrali integralni hisoblang: $\iint_D (x + y^2) dx dy$,

D - $y = x$ va $y = x^2$ egri chiziqlar bilan chegaralangan soha.

3. Karrali integralni hisoblang: $\iint_D (2x - y) dx dy$, D ushbu

$y = 2x - 1$, $y = 2x - 3$, $y = 1 - x$, $y = 2 - x$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Muntazam soha nima?

2. Oy o'qi bo'yicha muntazam soha bo'yicha ikki karrali integral qanday hisoblanadi?
3. Oy o'qi bo'yicha muntazam soha bo'yicha ikki karrali integral qanday hisoblanadi?
4. Nomuntazam sohalar bo'yicha integral qanday hisoblanadi?
5. Karrali integrallarda o'zgaruvchini almashtirish formulasini ayting.
6. Yakobian nima?
7. Qutb koordinatalar sistemasiga o'tish formulasini ayting.

24-MA'RUZA UCH KARRALI INTEGRAL TA'RIFI, MAVJUDLIK TEOREMASI. UCH KARRALI INTEGRALNING XOSSALARI

REJA:

1. Parallelepipedda 3 karrali integral
2. Uch o'lchovli integralning xossalari.
3. O'rta qiymat haqidagi teorema.
4. Integralning chegaralanganligi haqidagi teorema:

Tayanch iboralar: Uch o'lchovli integral, integral yig'indi, hajm elementi, integrallash sohasi, modda massasi, intersiya moment, og'irlik markazi.

24.1. Parallelepipedda 3 karrali integral

Karrali integral yoki n -o'lchovli integralning $n \geq 3$ bo'lgandagi haqiqiy o'zgaruvchilarining xususiyatlari ko'rib o'tilgan ikki karrali integrallarniki bilan o'xshash. Avvalgi vaziyatlardagi farqlarni $n = 3$ uchun ortib boruvchi o'lchovlar tufayli ko'rib chiqamiz.

Tekislikdagi to'rtburchak kabi fazodagi parallelepiped olingan. Umumiy to'plam $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ni $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$, $\{y_0, y_1, \dots, y_q\}$ va

$\{z_0, z_1, \dots, z_r\}$ nuqtalaridan foydalangan holda $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ kabi qism to'plamlarga ajratilishi mumkin. B shakl shunday Parallelepipedlar birlashmasidir.¹¹⁵

$$B_{hkl} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k] \times [z_{l-1}, z_l].$$

$f: B \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani olamiz; f ning B dagi quyi va yuqori yig'indilarini yozamiz:

$$s = s(\mathcal{D}, f) = \sum_{\ell=1}^r \sum_{k=1}^q \sum_{h=1}^p m_{hkl} (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})(z_\ell - z_{\ell-1}),$$

$$S = S(\mathcal{D}, f) = \sum_{\ell=1}^r \sum_{k=1}^q \sum_{h=1}^p M_{hkl} (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})(z_\ell - z_{\ell-1}),$$

bu yerda,

¹¹⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$m_{hkl} = \inf_{(x,y,z) \in B_{hkl}} f(x,y,z), \quad M_{hkl} = \sup_{(x,y,z) \in B_{hkl}} f(x,y,z).$$

24.1-Ta'rif. f funksiya B da **integrallanuvchi** deyiladi, agar

$$\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f);$$

bo'lsa, bunday ifoda fning B dagi **uch karrali integrali** deyiladi va quyidagilarning biri bilan belgilanishi mumkin:¹¹⁶

$$\int_B f, \quad \iiint_B f, \quad \int_B f(x,y,z) dx dy dz.$$

24.2-Misol: Hisoblang.

$\int_B xyz dx dy dz$ berilgan. $B = [0, 1] \times [-1, 2] \times [0, 2]$.

$$\begin{aligned} \int_B xyz dx dy dz &= \int_0^2 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 xyz dx \right) dy \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_{-1}^2 yz dy \right) dz = \frac{3}{4} \int_0^2 z dz = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Uch o'lchovli integral ham ikki o'lchovli integralga o'xshash aniqlanadi. Fazoning biror (ω) sohasida va shu sohaning σ chegarasida aniqlangan uchta o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi $u = f(x; y; z)$ ni qaraymiz. Quyidagi amallarni bajaramiz:

1) (ω) sohani har xil sirtlar (xususiyl holda bu sirtlar koordinata tekisliklariga parallel bo'lishi mumkin) bilan n ta ixtiyoriy jismga bo'lamiz:

$$\Delta \omega_1, \Delta \omega_2, \Delta \omega_3, \dots, \Delta \omega_1, \dots, \Delta \omega_n$$

bu qismlarni elementar hajmlar deb ataymiz va tegishli jismlarning hajimlarini ham xuddi shunday belgilaymiz.

2) Har bir elementar hajimdan bittadan $P_i(x_i; y_i; z_i)$ nuqta olamiz, natijada n nuqtaga ega bo'lamiz.

$$P_1(x_1; y_1; z_1), P_2(x_2; y_2; z_2), \dots, P_i(x_i; y_i; z_i), \dots, P_n(x_n; y_n; z_n)$$

3) Tanlab olingan $P_i(x_i; y_i; z_i)$ nuqtalarda $u = f(P) = f(x; y; z)$ funksiyaning qiymatlarini hisoblab quyidagiga kelimiz:

¹¹⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$f(P_1) = f(x_1; y_1; z_1), \quad f(P_2) = f(x_2; y_2; z_2), \quad \dots, f(P_i) = f(x_i; y_i; z_i), \dots, \\ f(P_n) = f(x_n; y_n; z_n).$$

4) Ushbu ko‘rinishdagi ko‘paytmani tuzamiz: $f(P_i) \cdot \Delta\omega_i = f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta\omega_i$

5) Bu ko‘paytmalardan tuzilgan yig‘indi:

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\omega_i = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta\omega_i \quad (24.1)$$

24.3-Teorema. Agar $u = f(x, y, z)$ funksiya yopiq chegaralangan (ω) sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda sohani $\Delta\omega_i$ qismlarga bo‘lish sonining ortishi bilan $(n \rightarrow \infty)$ elementar hajmlar diametrining eng kattasi nolga intilganda (24.1) ko‘rinishdagi integral yig‘indining limiti mavjud bo‘ladi. Bu limit (ω) sohani $\Delta\omega_i$ qismlarga bo‘lish usuliga va ulardan olingan $P_i(x_i; y_i; z_i)$ nuqtalarni tanlash usuliga bog‘liq emas.¹¹⁷

Bu limit $u = f(x, y, z)$ funksiya soha (ω) bo‘yicha olingan **uch o‘lchovli integral** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{\max \Delta\omega_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\omega_i = \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega \quad (24.2)$$

bu yerda (ω) - integrallash sohasi, $f(x; y; z)$ - integral ostidagi funksiya, x, y, z - lar integrallash o‘zgaruvchilari, $d\omega$ **hajm elementi** deyiladi. Uch o‘lchovli integral sohani qismlarga bo‘lish usuliga bog‘liq bo‘lmaganligi uchun uni koordinatalar tekisliklariga parallel tekisliklar bilan tomonlari $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli prizmalarga bo‘lish mumkin, bunda $\Delta\omega_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$.

Uch o‘lchovli integral ta’rifiga ko‘ra:

$$\lim_{\max \Delta\omega_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\omega_i = \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega = \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy dz \quad (24.3)$$

Bu yerda $dx dy dz$ - dekart koordinata sistemasidagi hajm elementi deyiladi.

24.2. Uch o‘lchovli integralning tatbiqlari

Agar (ω) sohada $f(x, y, z) \equiv 1$ bo‘lsa, u holda uch o‘lchovli integralning qiymati (ω) sohaning V hajmiga teng bo‘ladi (uch o‘lchovli integralning geometrik ma’nosi).

¹¹⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$V = \iiint_{(\omega)} d\omega = \iiint_{(\omega)} dx dy dz. \quad (24.4)$$

Agar $f(P) = f(x, y, z)$ funksiya (ω) sohada massa taqsimlanishining zichligi bo'lsa, u holda uch o'lchovli integralning qiymati V hajmdagi modda massasini beradi (uch o'lchovli integralning fizik ma'nosi).

$$m = \iiint_{(\omega)} f(P) d\omega = \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (24.5)$$

Uch o'lchovli integral yordamida, shuningdek, quyidagilarni hisoblash mumkin:

a) Jismning xOy , xOz va yOz koordinata tekisliklariga nisbatan statik momentlari:

$$M_{xy} = \iiint_G z \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad M_{xz} = \iiint_G y \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{yz} = \iiint_G x \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad (24.6)$$

bunda $\rho(x, y, z)$ — modda solishtirma zichligi;

6) Jismning og'irlik markazi koordinatalari:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, y_c = \frac{M_{xz}}{m}, z_c = \frac{M_{xy}}{m}, \quad (24.7)$$

bunda m — jism massasi;

b) Jismning koordinata tekisliklari, koordinata o'qlari va koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_G y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, I_y = I_{xy} + I_{yz}, I_z = I_{xz} + I_{yz}, I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}. \quad (24.8)$$

24.3. Uch o'lchovli integralning xossalari

$$1. \quad V = \iiint_{(\omega)} k \cdot f(x, y, z) d\omega = k \cdot \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega$$

$$2. \quad \iiint_{(\omega)} [f(x, y, z) \pm \varphi(x, y, z)] d\omega = \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega \pm \iiint_{(\omega)} \varphi(x, y, z) d\omega$$

$$3. (\omega) = (\omega_1) + (\omega_2)$$

$$\iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega = \iiint_{(\omega_1)} f(x, y, z) d\omega + \iiint_{(\omega_2)} f(x, y, z) d\omega$$

$$4. \text{ a) } f(x, y, z) \geq 0 \rightarrow \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega \geq 0,$$

$$\text{ b) } f(x, y, z) \leq 0 \rightarrow \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega \leq 0$$

$$5. f(x, y, z) \geq \varphi(x, y, z) \rightarrow \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega \geq \iiint_{(\omega)} \varphi(x, y, z) d\omega$$

24.4. O'rta qiymat haqidagi teorema.

24.4-Teorema. Agar $f(P) = f(x, y, z)$ funksiya yopiq chegaralangan (ω) sohada uzluksiz bo'lsa, u holda bu sohada shunday $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta mavjud bo'ladiki, (ω) soha bo'yicha olingan uch o'lchovli integral integral ostidagi funksiyaning shu nuqtadagi o'rta qiymatini integrallash sohasi (ω) ning V hajmga ko'paytirilganiga teng, ya'ni:

$$\iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V \quad (24.9)$$

bu yerda V (ω) sohaning hajmi. Funksiyaning

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega = \frac{\iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega}{\iiint_{(\omega)} d\omega} \quad (24.10)$$

bu qiymati $f(x, y, z)$ funksiyaning *o'rta qiymati* deyiladi.¹¹⁸

24.5. Integralning chegaralanganligi haqidagi teorema

24.5-Teorema. Agar $f(P) = f(x, y, z)$ funksiya yopiq chegaralangan (ω) sohada uzluksiz hamda m va M lar funksiyaning (ω) sohadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa, u holda uch o'lchovli integral funksiyaning eng kichik qiymati m ni integrallash sohasining V hajmga ko'paytmasi bilan eng katta qiymati M ning o'sha hajmga ko'paytmasi orasida yotadi (agar funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda uch o'lchovli integral ham chegaralangandir).¹¹⁹

¹¹⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

¹¹⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$m \cdot V \leq \iiint_{(\omega)} f(x, y, z) d\omega \leq M \cdot V \quad (24.11)$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Uch o'zgaruvchili funksiyaning integral yig'indisi qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Uch o'lchovli integralning mavjudligi haqidagi teoremani ayting.
3. Uch o'lchovli integralning geometrik ma'nosi nima?
4. Uch o'lchovli integralning mexanik ma'nosini ayting
5. Uch o'lchovli integralning xossalari ayting.
6. O'rta qiymatdagi haqidagi teoremani ayting.
7. Integralning chegaralanganligi haqidagi teoremani ayting.

25 – MA’RUZA DEKART KOORDINAT SISTEMASIDA UCH KARALI INTEGRAL. UCH KARRALI INTEGRALLARDA O‘ZGARUVCHINI ALMASHTIRISH. SILINDRIK VA SFERIK KOORDINATALAR SISTEMASIDA UCH KARRALI INTEGRAL

REJA:

1. Dekart koordinatalarida uch o‘lchovli integrallarni hisoblash.
2. Uch karrali integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish
3. Silindrik koordinatalar sistemasida uch karrali integral.
4. Sferik koordinatalar sistemasida uch karrali integralni hisoblash

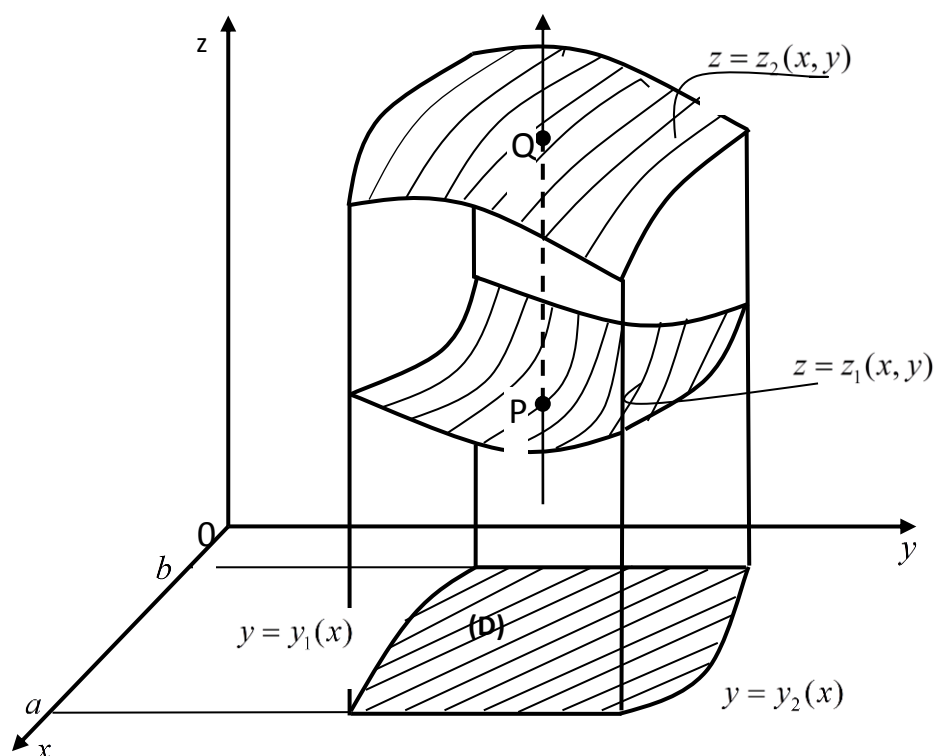
Tayanch iboralar: Uch karrali integral, uch o‘lchovli integralda o‘zgaruvchilarini almashtirish, silindrik koordinatalar sistemasi, sferik koordinatalar sistemasi

25.1. Dekart koordinatalarida uch o‘lchovli integrallarni hisoblash.

$$\iiint_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy dz \quad (25.1)$$

Integralni hisoblash uchta aniq integralni ketma-ket integrallashga keltiriladi. (ω) integrallash sohasi pastdan $z = z_1(x, y)$ sirt bilan, yuqoridan esa $z = z_2(x, y)$ sirt bilan chegaralangan deb faraz qilamiz. Bu Oxy tekislikdagi (D) sohaga proeksiyalansin. (D) soha $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ chiziqlar bilan (bunda $y_1(x) \leq y_2(x)$) va $x = a$, $x = b$ ($a < b$) to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lsin. Jismning istalgan ichki nuqtasi orqali o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz(1-shakl). U ω - jism chegarasini ikkita P va Q nuqtalarda kesib o‘tadi. Uch o‘lchovli integralning qiymati

$$\iiint_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (25.2)$$



25.1-chizma

formula bo'yicha hisoblanishini isbotlash mumkin. O'ngda turgan integralga **uch karrali integral** deyiladi. Bu integralni hisoblash uchun oldin ichki integralni, x va y ni o'zgarmas deb olib, z o'zgaruvchi bo'yicha integrallash kerak. Hisoblash natijasi x va y ga bog'liq bo'lgan funksiyadir. Bu integral o'rta integral uchun y bo'yicha integral osti funksiyasi bo'ladi, bunda x o'zgarmas deb hisoblanadi. Nihoyat, ikkinchi integrallash natijasi faqat x ga bog'liq funksiya bo'ladi. Uni a dan b gacha chegarada integrallab, uch o'lchovli integralning qiymatini topamiz.¹²⁰

25.1-misol. $x=0$, $y=0$, $z=0$ va $x+y+z=1$ sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmini toping.

Yechish.
$$V = \iiint_{(\omega)} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(z \Big|_0^{1-x-y} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} \right) dx =$$

¹²⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$= \int_0^1 \left(1 - x - x \cdot (1 - x) - \frac{(1 - x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(1 - 2x + x^2 - \frac{1 - 2x + x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} \quad \text{kub birlik.}$$

25.2. Uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish

Oxyz koordinatalarsistemasida yotuvchi (ω) sohada $u = f(x; y; z)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\iiint_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy dz \quad (25.3)$$

mavjud. Faraz qilaylik, x, y va z koordinatalar yangi u, v, w o'zgaruvchilarning funksiyalari bo'lsin:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) = \varphi(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) = \psi(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) = \phi(u, v, w) \end{cases} \quad (25.4)$$

Bu formulalar yordamida (25.3)-integralda yangi u, v, w o'zgaruvchilarga o'tamiz. (25.4)-formulalardan u, v, w larni yagona usulda aniqlash mumkin bo'lsin:

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad (25.5)$$

(25.5) formulalar yordamida (ω) sohaning har bir $P(x; y; z)$ nuqtasiga koordinatalarning O_{uvw} sistemasidan biror $\bar{P}(u; v; w)$ nuqta mos qo'yiladi. Barcha $\bar{P}(u; v; w)$ nuqtalar to'plami fazoning chegaralangan yopiq $(\bar{\omega})$ sohasini tashkil etadi. Yuqoridagilardan

$$\iiint_{(\omega)} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{(\bar{\omega})} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |I| du dv dw \quad (25.6)$$

formula o'rinli bo'ladi.¹²¹

¹²¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\text{Bu yerda } I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (25.7)$$

Unga $\varphi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$, $\phi(u, v, w)$ funksiyalarning funksional determinanti deb ataladi. Bu determinant nemis matematigi Yakobi nomi bilan yakobian deb ham yuritiladi.

25.3. Silindrik koordinatalar sistemasida uch karrali integral

Oxyz koordinatalar sistemasida yotuvchi $M(x, y, z)$ nuqtani qaraymiz. $P(x, y)$ nuqta $M(x, y, z)$ nuqtanig Oxy tekislikdagi proeksiyasi bo'lsin. $M(x, y, z)$ nuqtaning fazodagi holatini $P(x, y)$ nuqtaning qutb koordinatalarini Oxy tekislikda berish va $M(x, y, z)$ nuqtaning z applikatasini berish bilan aniqlash mumkin(25.2-shakl). Bu uchta r , φ va z sonlar $M(x, y, z)$ nuqtaning **silindrik koordinatalari** deyiladi.¹²²

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (25.8)$$

bunda $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. r , φ va z lar bo'yicha xususiy hosilalarni topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \varphi, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi, & \frac{\partial x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \cos \varphi, & \frac{\partial y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial z} &= 1, \end{aligned} \quad (25.9)$$

bundan

$$I = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad (25.10)$$

(25.6)-formula quyidagi ko'rinishni oladi:

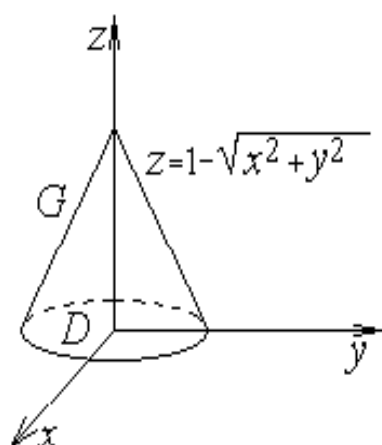
¹²² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\iiint_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(\omega)} f(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi, z) \cdot r dr d\varphi dz \quad (25.11)$$

25.2-misol. Integralni hisoblang: $\iiint_{(\omega)} ((x+y)^2 - z) dx dy dz$, (ω) - soha $z=0$ va $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ sirtlar bilan chegeralangan.

Yechish. G soha chegarasi bo'lgan konussimon sirt tenglamasini $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ko'rinishda yozish mumkin, G sohaning o'zini esa quyidagicha tasvirlash mumkin $G = \{(x, y, z): (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$, bunda D — markazi koordinatlar boshida, radiusi 1 ga teng bo'lgan doira (1-shakl). Silindrik koordinatalariga o'tamiz $(r, \varphi, z): x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$, bunda $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - r$.

Silindrik koordinatalaridagi integral osti funksiyasi quyidagiga teng:



25.2-chizma.

$r^2(1 + \sin 2\varphi) - z$, silindrik koordinatalariga o'tish yakobiani r ga teng. Shuning uchun

$$\begin{aligned} \iiint_G ((x+y)^2 - z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{G^*} (r^2(1 + \sin 2\varphi) - z) r dr d\varphi dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{1-r} (r^2(1 + \sin 2\varphi) - z) r dz = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3(1-r)(1 + \sin 2\varphi) - \frac{1}{2} r(1-r)^2) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{20}(1 + \sin 2\varphi) - \frac{1}{24} \right) d\varphi = \frac{\pi}{60}.$$

25.4. Sferik koordinatalar sistemasida uch karrali integral

Oxyz koordinatalar sistemasida yotuvchi $M(x, y, z)$ nuqtani qaraymiz. M nuqtaning fazodagi holati uning koordinatalar boshigacha bo'lgan masofasi (M nuqta radius vektori uzunligi), radius vektor bilan Oz o'q orasidagi θ burchak hamda nuqta radius vektorning Oxy tekislikka proeksiyasi bilan Ox orasidagi φ burchak orqali

aniqlanadi(25.4-shakl). Bu uchta r , φ va θ sonlar $M(x, y, z)$ nuqtaning **sferik koordinatalari** deyiladi.¹²³

$M(x, y, z)$ nuqtaning sferik koordinatalari bilan quyidagi munosabatlar orqali bogʻlangan:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{bunda} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ r \geq 0 \end{cases}, \quad (25.12)$$

Almashtirish yakobiani $I = r^2 \cdot \sin \theta$.

Shu sababli (25.6)-formula quyidagi koʻrinishni oladi:

$$\iiint_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\omega} f(r \sin \theta \cdot \cos \varphi; r \sin \theta \cdot \sin \varphi; r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \quad (25.13)$$

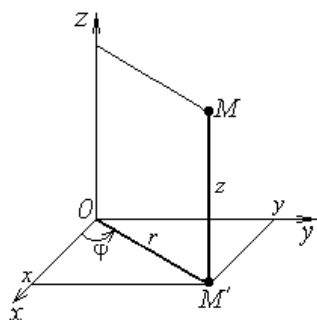
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \\ \theta = \arccos \frac{z}{r} \end{cases}$$

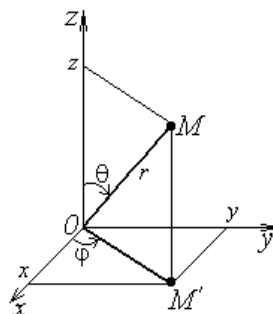
Sferikdan Dekartga oʻtish.

$$V_{x,y,z} = I \cdot V_{r,\theta,\varphi}$$

Yakobian I – hajmning oʻzgarish koeffisientlari.



25.3-chizma



25.4-chizma

¹²³ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

25.3-misol. $\iiint_{\omega} x dx dy dz$, $(\omega): (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0)$.

Yechish.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\bar{\omega}) = \left\{ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq p \leq 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{(\omega)} x dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 p \sin \theta \cos \varphi (p^2 \sin \theta) dp = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 p^3 \sin^2 \theta \cdot \cos \varphi dp = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{16} \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $z = 0$, $z = 1$ sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmini hisoblang.
2. Integralni hisoblang.

$$\iiint_{\omega} (x^2 + y^2 + 1) dx dy dz \quad \omega: z = x^2 + y^2, \quad z = 1$$

3. Berilgan sirtlar bilan chegaralangan jism hajmini toping.

$$z = 6 - x^2 - y^2, \sqrt{x^2 + y^2} = z.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Uch o'ldchovli integral qanday hisoblanadi?
2. Uch karrali integral nima?
3. Uch karrali integralda Dekart koordinatalaridan silindirik koordinatasiga o'tish formulasini ayting.
4. Uch karrali integralda Dekart koordinatalaridan sferik koordinatasiga o'tish formulasini ayting.
5. Uch karrali integralda Dekart koordinatalaridan silindirik koordinatasiga o'tishda almashtirish yakobiani nimaga teng?

26-MAVZU 1- TUR EGRI CHIZIQLI INTEGRAL VA ULARNI HISOBLASH. XOSSALARI

REJA:

5. 1- tur egri chiziqli integral tushunchasiga olib keladigan masala.
6. 1- tur egri chiziqli integral va uning xossalari.
7. 1- tur egri chiziqli integralni hisoblash.

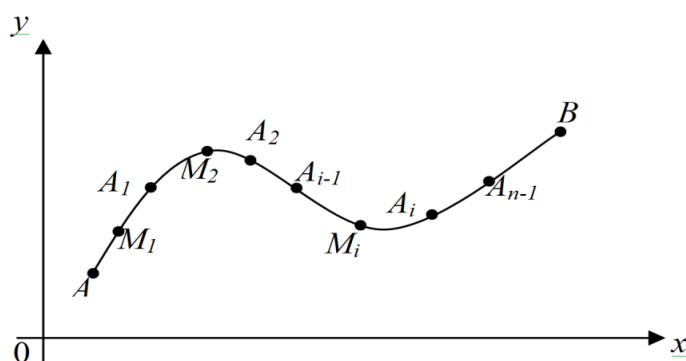
Tayanch iboralar: 1- tur egri chiziqli integral, bo‘linish diametri, I-tur integral yig‘indi, integrallash yo‘li (kontur), silindrik sirtning yuzi

26.1. Birinchi tur egri chiziqli integral tushunchasiga olib keladigan masala

Egri chiziqli integralni biror oraliqda aniqlangan aniq integralning umumlashmasi sifatida qarash mumkin.

Tekislikda sodda to‘g‘rilanuvchi (AB) yassi egri chiziq (metal sim) berilgan bo‘lsin. Bu yassi egri chiziqda massa bir xil uzluksiz taqsimlangan bo‘lsin. Bu yassi egri chiziqning har bir nuqtasida ρ zichligi ma‘lum bo‘lsa, ya‘ni $\rho(M_i)$ bo‘lsa, shu simning (yassi egri chiziq) massasini hisoblaymiz. Quyidagi ishlarni bajaramiz:

1) $\overline{AB}$ yoyni $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_n$ nuqtalar bilan n ta bo‘lakka(yoyga) bo‘lamiz. Hosil bo‘lgan yoy uzunligining eng kattasini d bilan belgilaymiz va bo‘linish diametri deb ataymiz.¹²⁴



¹²⁴ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

2) $\overline{A_{i-1}A_i} = \Delta l_i$ yoyda bittadan M_i nuqta olamiz va unda,

3) $\rho_i = P(M_i)$ zichlikni hisoblaymiz.

4) Har bir yoyning massasi m_i ni hisoblaymiz:

$$m_i \approx P(M_i) \cdot \Delta l_i$$

5) Umumiy massa

$$m \approx \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n P(M_i) \cdot \Delta l_i$$

6) $n \rightarrow \infty (d \rightarrow 0)$ da m massa hisoblanadi ($d = \max \Delta l_i$),

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(M_i) \cdot \Delta l_i.$$

(Yo.U. Soatov “Oliy matematika” 2-jild 120 betdan o‘qib olamiz.)

26.2. Birinchi tur egri chiziqli integral va uning xossalari

Oxy tekislikda (AB) egri chiziq $y = f(x, y)$ funksiya bilan berilgan bo‘lsin. (AB) yoyni n ta yoylarga ajratib har bir yoyda bittadan $M_i(x_i, y_i)$ nuqta olib bu nuqtalarda $f(x_i, y_i)$ funksiya qiymatini hisoblab quyidagi yig‘indini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^n f(m_i) \cdot \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta l_i \quad (26.1)$$

(26.1) yig‘indilar $f(x, y)$ funktsiya uchun (AB) yassi egri chiziq bo‘ylab olingan **I-tur integral yig‘indi** deyiladi.

26.1.-Ta’rif: $\widetilde{AB}$ yoyning bo‘linish qismlarining eng katta Δl_i uzunligi (uni diametri- d) nolga intilgan shartda (26.1) integral yig‘indining limiti **I-tur egri chiziqli integral** deyiladi. (yoki **yoy uzunligi bo‘yicha egri chiziqli integral** deyiladi).¹²⁵

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x; y) dl = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta l_i \quad (26.2)$$

¹²⁵ Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Bu yerda (AB) egri chiziqni **kontur** yoki **integrallash yo'li** deyiladi. Agar $f(x, y)$ funksiya (AB) konturning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa bu limit mavjud. I-tur egri chiziq integral integrallash yo'lining yo'nalishiga bog'liq emas.

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$$

Birinchi tur egri chiziqli integrallar yordamida egri chiziq yoyining uzunligini, moddiy yoy massasini, silindrik sirt yuzini hisoblash mumkin.

a) $\int_{Ab} dl = l_{AB}$, bu yerda l_{AB} - AB yoy uzunligi;

b) $\int_{Ab} \rho(x, y) dl = m$, bu yerdan AB yoy moddiy massasi, $\rho(x, y)$ - bu yoyning chiziqli zichligi;

c) $\int_{Ab} f(x, y) dl = S$, bu yerda S - yasovchilari Oz o'qqa parallel va AB yoy nuqtalaridan o'tuvchi, pastdan bu yoy bilan, yuqoridan silindrik sirtning $z = f(x, y)$ ($f(x, y) > 0$) sirt bilan kesishish chizig'i bilan, yon tamondan esa A va B nuqtalardan Oz o'qqa parallel o'tgan chiziqlar bilan chegaralangan silindrik sirtning yuzi.

26.2.-Xossalari:

1. $\int_{AB} kf(x, y) dl = k \int_{AB} f(x, y) dl$, k - o'zgarmas son.
2. $\int_{AB} (f(x, y) \pm \varphi(x, y)) dl = \int_{AB} f(x, y) dl \pm \int_{AB} \varphi(x, y) dl$.
3. $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{AC} f(x, y) dl + \int_{CB} f(x, y) dl$, bu yerda $AC + CB = AB$.

26.3. Birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblash

Hisoblash usuli AB egri chiziq tenglamasini berilish usullariga bog'liq.

1. AB egri chiziq parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsa, ya'ni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Bu holda $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$ va birinchi tur egri chiziqli integral

$$\int_{AB} f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt \quad (26.3)$$

formula bilan hisoblanadi.

2. AB egri chiziq $y=y(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa ($a \leq x \leq b$), integral

$$\int_{AB} f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (26.4)$$

formula bilan hisoblanadi.

3. AB egri chiziq $x=x(y)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa ($c \leq y \leq d$), integral

$$\int_{AB} f(x, y) d\ell = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2} dy \quad (26.5)$$

formula bilan hisoblanadi.

4. AB egri chiziq $r=r(\varphi)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$), integral

$$\int_{AB} f(x, y) d\ell = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (26.6)$$

5. AB fazoviy egri chiziq $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsa ($\alpha \leq t \leq \beta$), integral

$$\int_{AB} f(x, y, z) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt \quad (26.7)$$

formula bilan hisoblanadi.¹²⁶

26.3.-misol. Agar $y=\ln x$ egri chiziqning $x=1$ va $x=2$ absissali nuqtalar orasidagi yoyi massasining zichligi $\rho=x^2$ bo'lsa, bu yoyning massasini toping.

Yechish. Modda massasini topish formulasi va (26.4) formuladan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

¹²⁶ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$m = \int_{AB} x^2 d\ell = \int_1^2 x^2 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^2 x^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^2 x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) \approx 2,784$$

26.4.-misol. Hisoblang: $\int_L (x-y)d\ell$, bu yerda $L: x^2+y^2=4x$ aylana.

Yechish. $x^2+y^2=4x$ tenglamani qutb koordinatalar sistemasida ifodalaymiz. Buning uchun $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ almashtirish bajarsak, L chiziqli tenglamasi $r=4\cos\varphi$ bo'ladi. $\cos\varphi \geq 0$ ekanini hisobga olib, oraliqni topamiz va (26.6) munosabatdan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_L (x-y)d\ell = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi - r\sin\varphi) \sqrt{16\cos^2\varphi + 16\sin^2\varphi} d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(\cos\varphi - \sin\varphi) d\varphi.$$

Endi $r=4\cos\varphi$ ekanini hisobga olib, aniq integralni hisoblaymiz:

$$4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi) d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2\cos 2\varphi - 2\sin 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 4(2\varphi - \sin 2\varphi + \cos 2\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4(\pi - 1 + \pi + 1) = 8\pi.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi birinchi tur egri chiziqli integrallarni hisoblang:

1. $\int_L y^2 d\ell$, bu yerda L - $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ sikloida arkasi

$(0 \leq t \leq 2\pi).$

2. $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} d\ell$, bu yerda L - $r = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ qutb chiziqlari bilan chegaralangan yopiq kontur.

3. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} d\ell$, bu yerda $L - x^2 + y^2 = 16y$ aylana.
4. $\int_L (2x + y) d\ell$, bu yerda L – uchlari $O(0, 0)$, $A(1, 3)$, $B(0, 5)$ bo‘lgan uchburchak konturi.
5. $\int_L xy d\ell$, bu yerda $L - x = 2cht, y = 2sht(0 \leq t \leq 2)$ giperbola yoyi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Birinchi tur egri chiziqli integralga olib keladigan masalani ayting.
2. Birinchi tur egri chiziqli integral qanday hisoblanadi?
3. Birinchi tur egrichiziqli integral integrallash yo‘li parametric tenglama bilan berilgan holda qanday hisoblanadi?
4. Birinchi tur egri chiziqli integralning xossalarini ayting.
5. Birinchi tur egri chiziqli integral yordamida nimalarni hisoblash mumkin?

27-MA'RUZA 2- TUR EGRI CHIZIQLI INTEGRAL VA ULARNI HISOB-LASH. XOSSALARI GRIN FORMULASI. 2 TUR EGRI CHIZIQLI INTEGRALNING INTEGRALLASH YO'LIGA BOG'LIQ BO'LMASLIK SHARTI

REJA.

1. II tur egri chiziqli integral va uning xossalari.
2. II tur egri chiziqli integralni hisoblash.
3. Grin formulasi.
4. II tur egri chiziqli integralni integralash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti.

Tayanch ibora va tushunchalar: II tur egri chiziqli integral, II tur integral yig'indi, yopiq kontur bo'yicha integrallash, kuchning bajargan ishi, Grin formulasi.

27.1. II tur egri chiziqli integrallar va uning xossalari

Oxy tekilikda har bir nuqtasida $P(x, y)$ ($Q(x, y)$) funksiya berilgan biror AB silliq egri chiziqni qarab chiqamiz. Bu chiziqni $A, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_{n-1}, B$ nuqtalar bilan n ta bo'lakka (yoylarga) ajratamiz va har bir bo'lakdan bittadan $M_i(x_i, y_i)$ nuqta tanlab olamiz. Bu nuqtalarning $Ox(Oy)$ koordinata o'qiga proyeksiyalarini qaraymiz. $M_i(x_i, y_i)$ da berilgan funksiya qiymatlarini hisoblaymiz va $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$) ga ko'paytirib quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta x_i \left(\sum_{i=1}^n Q(M_i) \Delta y_i = \sum_{i=1}^n Q(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta y_i \right). \quad (27.1)$$

(27.1) ko'rinishdagi yig'indilar $P(x, y)(Q(x, y))$ funksiya uchun AB egri chiziq bo'ylab olingan **ikkinchi tur integral yig'indilar** deb ataladi.

27.1.-Ta'rif. Bo'linish qismlari proyeksiyalarining eng katta Δx_i (Δy_i) uzunligi nolga intilganda (27.1) integral yig'indining limiti **ikkinchi tur egri chiziqli integral** deyiladi va

$$\int_{AB} P(x, y) dx \left(\int_{AB} Q(x, y) dy \right)$$

kabi belgilanadi.¹²⁷ Ya'ni

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta x_i$$

¹²⁷ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\left(\int_{AB} Q(x, y) dy = \lim_{\max \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Delta y_i \right)$$

Agar $P(x, y)(Q(x, y))$ funksiya AB konturning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, bu limit mavjud bo'ladi.

Ikkinchi tur egri chiziqli integrallash yo'lining yo'nalishiga bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx .$$

Agar AB egri chiziqda ikkita $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar berilgan bo'lsa,

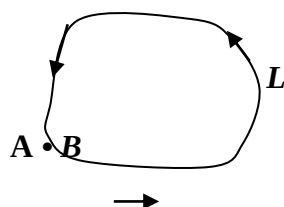
$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (27.2)$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralning umumiy ko'rinishi deb ataladi.

A va B nuqtalar ustma-ust tushsa, $AB=L$ yopiq kontur bo'lgan holda integral quyidagicha belgilanadi:

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy .$$

Bu holda yo'nalish kontur ichidagi yotuvchi soha chapda qoladigan qilib tanlanadi:



Agar $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar $\vec{F}$ - kuchning koordinatalar o'qidagi proyeksiyalari bo'lsa ($\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$), u holda (27.2) integral shu **kuchning AB yo'lda bajargan ishini** ifodalaydi.¹²⁸

L yopiq kontur bo'yicha hisoblangan quyidagi ikkinchi tur egri chiziqli integral shu kontur bilan chegaralangan **sohaning S yuziga** teng bo'ladi:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L (x dy + y dx) . \quad (27.3)$$

¹²⁸ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

27.2.-Xossalari. Ikkinchi tur egri chiziqli integral birinchi tur egri chiziqli integralning hamma hossalariга egadir.

27.2. II tur egri chiziqli integralni hisoblash

1. AB egri chiziq parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

t parametr α dan β gacha o'zgaradigan bo'lsin ($\alpha < \beta$).

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt \quad (27.4)$$

formula bilan hisoblanadi.

2. AB egri chiziq $y=y(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa ($a \leq x \leq b$),

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx. \quad (27.5)$$

formula bilan hisoblanadi.

3. AB egri chiziq $x=x(y)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa ($c \leq y \leq d$),

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]dy. \quad (27.6)$$

formula bilan hisoblanadi.¹²⁹

I va **II** tur egri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanish.

$$\int_{(AB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{(AB)} [P(x; y)\cos\alpha + Q(x; y)\cos\beta]dl$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\varphi)dl$$

27.3.-misol. $\int_L (y + x^3)dx, \quad L: \{y = 4 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2\}$

$$\int_0^2 (4 - x^2 + x^3)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 9\frac{1}{3}$$

27.4.-misol. $\int_L (x + y)dx + xydy; \quad L: \{y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1\}$

¹²⁹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\int_0^2 (x + x^2 + x \cdot x^3 \cdot 2x) dx = \int_0^1 (x + x^2 + 2 \cdot x^4) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{15+10+12}{30} = \frac{37}{30}$$

27.5.-misol. $\int_{(AB)} (x+y)dx + (x-z)dy + (y+z)dz$

(AB): $A(-1; 2; 0), \quad B(3; 1; 2), \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} = t, \quad x=4t-1, \quad y=-t+2, \quad z=2t$

$$\int_0^2 (12t+9)dt = (6t^2+9t) \Big|_0^2 = 6+9=15.$$

27.3. Grin formulasi.

Yopiq kontur bo'yicha olingan II tur egri chiziqli integral bilan shu konturdagi soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integral orasidagi bog'lanishni ko'ramiz .

27.6.-Teorema. Agar $P(x; y)$ va $Q(x; y)$ funksiyalar D sohada o'zlarining birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan uzluksiz bo'lsa u holda

$$\oint_{(L)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (27.7)$$

formula o'rinli bo'ladi bu yerda (L) – (D) cohaning chegarasi (integrallash yo'li musbat)

(27.7) – **Grin formulasi** deyiladi.¹³⁰

27.4. II tur egri chiziq integralini integralash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti.

Sohada uzluksiz va funksiyalarning hususiy hosilalari ham sohada uzluksiz bo'lsin.

27.7.-Teorema. $\int_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ integral L integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun

¹³⁰ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

bo'lishi zarur va etarli.¹³¹

Xulosa. II tur integrali integrallash yo'liga bog'liq bo'lmashligi uchun integral ostidagi ifoda qandaydir funksiyaning to'la differensialdan iborat bo'lishi kerak, ya'ni

$$du(x; y) = P(x; y)dx + Q(x; y)dy$$

Bu holda $A(x_1, y_2), B(x_2, y_2)$ bo'yicha integral

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) \quad (27.8)$$

Agar u funksiyaning ko'rinishi bizga ma'lum bo'lmasa va $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1)dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y)dy \quad (27.9)$$

formula bilan hisoblanadi.¹³²

$$\textbf{27.8.-misol.} \quad \int_L (x - y)dx + (x + y)dy \quad L: x^2 + y^2 = R^2$$

Yechish. 1) Grin formulasidan foydalansak,

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 2 \iint_D dxdy = 2\pi R^2$$

2) Egri cizikli integralni hisoblasak,

$$\begin{aligned} \oint_L (x - y)dx + (x + y)dy &= \int_0^{2\pi} R^2 (-\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + \cos t \cdot \sin t) dt = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} dt = R^2 \cdot t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

$$\textbf{27.9.-misol.} \quad \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}, \text{ bu yerda } Oy \text{ o'qini kesib o'tmaydigan yo'l bo'yicha integral.}$$

¹³¹ Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

¹³² Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010

Yechish. $P(x, y) = \frac{y}{x^2}, Q(x, y) = -\frac{1}{x}, x \neq 0$, shuning uchun $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$.

(27.9) formuladan foydalanamiz:

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int_2^1 \frac{dx}{x^2} - \int_1^2 dy = -\frac{1}{x} \Big|_2^1 - y \Big|_1^2 = -1 + \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{3}{2}.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni hisoblang:

1. $\int_L xdy$, bu erda L – uchlari $O(0, 0), A(4,0), B(4, 5)$ bo‘lgan uchburchak konturi, musbat yo‘nalishda.
2. $\int_L (x^2 - y^2)dy$, bu erda $L - y=x^2$ parabolaning $O(0,0)$ nuqtadan $A(2,4)$ gacha yoyi.
3. $\int_L ydx + xdy$, bu erda $L - x=R\cos t, y=R\sin t, t_1=0$ dan $t_2=\pi/2$ gacha chorak aylana.
4. $\int_{OA} xydx + (y-x)dy$, bu erda $OA - y^2=x$ parabolaning $O(0,0)$ nuqtadan $A(1,1)$ gacha yoyi.
5. $\int_L ydx - xdy$, bu erda $L - x=4\cos t, y=3\sin t$ ellips musbat yo‘nalishi bo‘yicha.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tur egri chiziqli integral deb nimaga ytiladi?
2. Ikkinchi tur egri chiziqli integral qanday hisoblanadi?
3. Ikkinchi tur egri chiziqli integral integrallash yo‘li parametrik tenglama bilan berilgan holda qanday hisoblanadi?
4. Ikkinchi tur egri chiziqli integralning xossalarini ayting.
5. Ikkinchi tur egri chiziqli integral yordamida nimalarni hisoblash mumkin?
6. Ikkinchi tur egri chiziqli integral integrallash yo‘liga bog‘liqmi?
7. Qanday shart bajarilganda ikkinchi tur egri chiziqli integral integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaydi?
8. Grin formulasini ayting.

**OLIY MATEMATIKA. EHTIMOLLAR NAZARIYASI
VA MATEMATIK STATISTIKA**

**FANIDAN II-SEMESTR UCHUN
AMALIY MASHG‘ULOTLAR MATERIALLARI**

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

TOSHKENT- 2016

**TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI
UNIVERSITETI**

“Oliy matematika”

kafedrası

**OLIY MATEMATIKA . EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA
MATEMATIK STATISTIKA**

KIRISH

Ushbu uslubiy qoʻllanma oliy matematika kursining “Qatorlar nazariyasi” boʻyicha berilgan bu mustaqil ish studentlar tomonidan 2-semestrda bajariladi.

Uslubiy qoʻllanma talabalar uchun qatorlar nazariyasiga doir mavzuni mustaqil oʻrganish hamda unga doir misol va masalalarni bajarish uchun moʻljallangan. Qoʻllanmada qatorlar nazariyasiga oid qisqacha nazariy bilimlar berilib, undan soʻng har bir mavzuga oid misol va masalalarni echish usullari bayon qilingan. Bundan tashqari talabalar uchun mustaqil bajarishlari uchun variantlarni keltirilgan.

Ushbu uslubiy qoʻllanma bakalavriatning barcha yoʻnalishdagi talabalari uchun 2-semestirda foydalanishga moʻljallangan.

Vazifani bajarish tartibi:

1. Vazifa studentlar tomonidan 2 - semestr davomida bajariladi va dekanatlar tomonidan tuzilgan grafik bo'yicha ko'rsatilgan muddatlarda yoqlanadi.
2. Nazariy savol va mashqlarga javoblar, masala va misollarning yechimlari yozma ravishda bajarilib topshiriladi.
3. Nazariy savol va mashqlar hamma studentlar uchun umumiy bo'lib, masala va misollar esa har bir student uchun alohida variantdan iborat.
4. Ishni yoqlash vaqtida student nazariy savollarga javob bera olishi, ishdagi masala misollarni, shuningdek o'xshash masala va misollarni yecha bilishi lozim.

Nazariy savollar:

1. Qatorlar va ularning yaqinlashish belgilari
2. Ishoralari almashinuvchi qatorlar, Leybnits teoremasi.
3. Funksional qatorlar. Kuchaytirilgan qatorlar haqida teorema.
4. Qatorlarni hadlab integrallash va differensiallash.
5. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusini va sohasini topish.
6. Teylor va Makloren qatorlari.
7. Binomial qatorlar.
8. Fur'e qatorlari. Berilgan $f(x)$ funksiyaning Fur'e koeffitsientlarini hisoblash.

Davri " 2ℓ " bo'lgan juft yoki toq funksiyalar uchun Fur'e qatori.

Nazariy mashqlar

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ garmonik qatorning uzoqlashuvchi qator ekani isbotlansin.
2. $\frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \dots + \frac{1}{n^r} + \dots$ qator “r” – sonning qanday qiymatida uzoqlashadi va qanday qiymatlarida yaqinlashadi? Ko`rsatilsin.
3. $\cos x$ - funksiya qatorga yoyilsin va $\cos 10^\circ$ ning qiymati $\varepsilon = 0,00001$ gacha aniqlik bilan hisoblansin.
4. Binominal qatordan foydalanib $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ va $\arcsin x$ funksiyalar qatorga yoyilsin.
5. $\ln(1+x)$ va $\ln \frac{1+x}{1-x}$ funksiyalar qatorga yoyilsin.
6. $\int_0^a e^{-x^2} dx$, $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx$ aniq integrallar qatorlar yordamida hisoblansin.
7. $x=1$, $y=1$, va $y'=0$ boshlang`ich shartni qanoatlantiruvchi $y' = xy$ differensial tenglamaning yechimi qator shaklida topilsin.
8. $-\pi < x \leq 0$ bo`lganda  $f(x)=x$  va  $0 \leq x \leq \pi$  bo`lganda $f(x)=2x$ bo`lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

1. Nazariy mashqning javobi:

Agar qator yaqinlashuvchi bo`lsa,  $n$  cheksiz o`sib borganda uning n -hadi nolga intiladi, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ va aksincha $n \rightarrow \infty$ da qatorning n -hadi nolga intilmasa, qator uzoqlashuvchi bo`ladi.

Masalan, $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$ qator uzoqlashuvchi, chunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ tenglik o'rinli bo'ladigan har qanday qator ham yaqinlashuvchi bo'lavermaydi.

Bu shartning bajarilishi qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun zaruriy, ammo utarli emas, ya'ni qator umumiy hadining nolga intilishi bilan qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqavermaydi, qator uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin. Masalan, garmonik qator deb ataluvchi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

qator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo'lishiga qaramasdan uning yaqinlashuvchi emasligini isbotlaymiz. Garmonik qatorning dastlabki bir necha hadlarini quyidagidek gruxlab yozamiz:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

har qaysi qavs ichidagi qo'shiluvchilarni ularning kichigi bilan almashtirib yordamchi qator tuzamiz. Natijada

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

ga ega bo'lamiz.

Har qaysi qavs ichidagi qo'shiluvchilar yig'indisi kichiklashadi va $\frac{1}{2}$ ga teng

bo'ladi. Oxirgi qator cheksiz ko'p qavslarga ega bo'lganligi sababli ularning yig'indisi cheksizlikka intiladi. Demak, garmonik qatorning yig'indisi lbatta

cheksizlikka intiladi..Shunday qilib, biz *garmonik* qatorning uzoqlashuvchi ekanligini isbotladik.

2-Nazariy mashqning javobi.

Berilgan $\frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \dots + \frac{1}{n^r} + \dots$ qator $0 < r \leq 1$ bo'lganda

uzoqlashuvchi, $r > 1$ bo'lganda esa yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Berilgan qatorda n ni x ga almashtirib u_n ni $f(x)$ deb belgilaymiz.

Natijada

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{-r+1}}{-r+1} \Big|_1^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{-r+1}}{-r+1} - \frac{1^{-r+1}}{-r+1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(-r+1)n^{r-1}} - \frac{1}{-r+1} \right) = \begin{cases} \frac{\infty}{1-r} & \text{agar } 0 < r \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{1-r} & \text{agar } r > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases} \end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz.

Bundan Koshining integral alomatiga ko'ra $0 < r \leq 1$ bo'lganda $\frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \dots + \frac{1}{n^r} + \dots$ qator uzoqlashuvchi, $r > 1$ bo'lganda esa yaqinlashuvchi bo'ladi.

Masalan: a) $r = \frac{1}{2}$ bo'lganda hosil bo'lgan $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ qator taqqoslash alomatiga ko'ra uzoqlashadi, chunki uning hadlari (ikkinchidan boshlab) uzoqlashuvchi bo'lgan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ garmonik qatorning mos hadlaridan katta bo'ladi yoki Koshining integral alomatiga ko'ra:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}+1} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-2\sqrt{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-2 \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{1})) = \infty$$

Demak, qator uzoqlashuvchi.

b) $r = 2$ bo'lganda

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1-2} x^{-2+1} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{\infty} + 1 = 1.$$

Bu xosmas integral yaqinlashuvchi. Demak,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

qator ham yaqinlashuvchidir.

3. Nazariy mashqning javobi:

$f(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ funktsiyani Makloren qatoriga yoyish uchun uning bir necha hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}), \quad f''(x) = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = \sin x = \sin(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}), \quad f^{(4)}(x) = \cos x = \sin(x + 5 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

.....

$$f^{(v)}(x) = \sin(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}), \quad (n = \overline{1, \infty})$$

bo'lganligi uchun $x = 0$ nuqtada quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad f^{(5)}(0) = 0, \quad f^{(6)}(0) = -1, \dots$$

hosilaning qiymatlari takrorlanadi va

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$$

takrorlanuvchi ketma-ketlikni hosil qiladi. $\cos x$ funktsiyaning istalgan hosilasi barcha x lar uchun absolyut qiymati bo'yicha 1 dan katta bo'lmaydi, ya'ni

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \sin \left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right| < 1 \quad \text{va} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Demak, sonlar to'g'ri chiziqining hamma nuqtalarida $\cos x$ funktsiya Makloren qatoriga yoyiladi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Endi $\cos 10^0$ ni $\varepsilon = 10^{-5} = 0,00001$ gacha aniqlik bilan hisoblaymiz. 10^0 yoki, radian hisobida, $\frac{\pi}{18} \approx 0,174533$ bo'lganligi uchun,

$$\cos 10^0 = 1 - \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^4 - \frac{1}{6!} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^6 + \dots$$

Birinchi uchta had bilan chegaralanib, ushbu taqribiy tenglikni hosil qilamiz:

$$\cos 10^0 = \cos\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^4,$$

bunda biz, absolyut qiymat jihatidan tashlab yuborilgan hadlarning birinchisidan kichik bo'lgan ε xatoga yo'l qo'yamiz, ya'ni

$$\varepsilon < \frac{1}{6!} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^6 < \frac{1}{720} \cdot (0,2)^6 < \frac{64}{72} \cdot (10)^{-7} < 0,00001.$$

4. Nazariy mashqning javobi:

$f(x) = (1+x)^\alpha$ funktsiyani Makloren qatoriga yoyamiz, bunda α -ixtiyoriy haqiqiy son. Bu erda $R_n(x)$ qoldiq hadni baholash birmuncha murakkab,

shu sababli berilgan funktsiyani yoyishda boshqacharoq yo'l tutamiz. $f(x)$ ni differentsiallaymiz. quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

$x=0$ da $f(0)=1$, $f'(0)=\alpha$, $f''(0)=\alpha(\alpha-1)$, ..., $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)$ larga ega bo'lamiz:

$$1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (*)$$

Bu qatorga binomial qator deyiladi. Endi bu qatorning yaqinlashish intervalini topamiz:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)(n+1)!}{n! \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)(\alpha-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1.$$

Bu erdan ko‘rinib turibdiki, binomial qator $X \in (-1, 1)$ intervalda absolyut yaqinlashadi.

Qoldiq hadni baholaymiz, bunda $X \in (0, 1)$ hol bilan cheklanamiz. Bu intervalda

$$(1+x)^{\alpha-n-1} = \frac{1}{(1+x)^{n-(\alpha-1)}} < 1 \text{ (barcha } n > \alpha-1 \text{ lar uchun) va shu sababli}$$

$$|f^{(n+1)}(x)| = |\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}| < |\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)|.$$

Bu erda funktsiyani Teylor qatoriga yoyio‘ning utarli sharti haqidagi teoremdan foydalanib bo‘lmaydi, chunki hosila uchun topilgan chegara n ga bog‘liq. Shu sababli

$$R_n(x) = \left| (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlikdan foydalanib,

$$|R_n(x)| < \left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

ekanligini aniqlaymiz. Oxirgi tengsizlikning o‘ng qismi $|x| < 1$ da yaqinlashuvchi (*) darajali qatorning $(n+1)$ -hadining absolyut qiymatidan iboratdir. Демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Shunday qilib, (*) binomial qator $X \in (-1, 1)$ da $(1+x)^\alpha$ funktsiyani ifodalaydi.

α ning turli qiymatlari uchun binomial qatorlarning bir necha xususiy ko‘rinishlarini hosil qilamiz:

a) Agar $\alpha = \frac{1}{2}$ bo‘lsa, u holda binomial qator bunday yoziladi:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n + \dots, \quad X \in [-1; 1].$$

б) Agar $\alpha = -\frac{1}{2}$ bo‘lsa, u holda binomial qator bunday yoziladi:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots, \quad x \in (-1; 1].$$

В) $f(x) = \arcsin x$ funksiyani Makloren qatoriga yoyish uchun dastlab binomialqatordagi x o'rniga $-x^2$ ifodani qo'yamiz:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}x^{2n} + \dots$$

$|x| < 1$ bo'lganda, darajali qatorni integrallash haqidagi teorema asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots$$

Bu qator $x \in (-1, 1)$ intervalda yaqinlashadi. Agar $x = 1$ deb olsak, π ni hisoblashning quyidagi formulasini hosil qilamiz:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots,$$

$$\pi = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} + \dots$$

5. Nazariy mashqning javobi:

$f(x) = \ln(1+x)$ funksiyani Makloren qatoriga yoyish uchun cheksiz kamayuvchi

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$$

Geometrik progressiyaning yig'indisi formulasidan foydalanamiz. Darajali qatorni o'zining yaqinlashish intervalida integrallash xossasidan foydalanamiz:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \dots + (-1)^n \int_0^x x^n dx + \dots$$

Bundan

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n+1} + \dots, \quad x \in (-1; 1). \quad (2)$$

Agar (1)-formulada x ni $-x$ ga almashtirsak $x \in (-1; 1)$ intervalda yaqinlashuvchi qator hosil bo'ladi:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad x \in (-1; 1). \quad (3)$$

(2) va (3) qatorlar yordamida nol bilan ikki orasidagi sonlarning logarifmlarini hisoblash mumkin.

Ixtiyoriy butun sonlarning natural logarifmlarini hisoblash uchun formula chiqaramiz.

Ikkita yaqinlashuvchi qatorning biridan ikkinchisini hadlab ayirganda hosil bo'lgan qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun (2) tenglikdan (3) tenglikni hadlab ayirib, quyidagi qatorni hosil qilamiz:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right].$$

So'ngra $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ deb faraz qilsak, $n > 0$ uchun $0 < x < 1$ bo'lganidan

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \frac{n+1}{n} = 2 \cdot \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right]. \quad (4)$$

6. Nazariy mashqning javobi:

Yuqori chegaraning funktsiyalari sifatida elementar funktsiyalar orqali chekli ko'rinishda ifodalanmaydigan aniq integrallar mavjud. Ba'zan bunday integrallarni qatorlar yordamida hisoblash qulay bo'ladi.

Quyidagi bir nechta integrallarni qaraymiz:

1. $\int_0^a e^{-x^2} dx$ integralni hisoblang. Bunda e^{-x^2} ning boshlang'ich funktsiyasi

elementar funktsiya bo'lmaydi. Bu integralni hisoblash uchun e^x ning yoyilmasidagi x ni $-x^2$ ga almashtirib, integral ostidagi funktsiyani qatorga yoyamiz:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Oxirgi tenglikning ikkala tomonini 0 dan a gacha chegarada integrallab, quyidagini topamiz:

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right)_0^a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1! \cdot 3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \dots$$

Bu tenglik yordami bilan a ning istalgan qiymatida berilgan integralni ixtiyoriy darajadagi aniqlik bilan hisoblay olamiz.

2. $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ ni hisoblang.

Yechish:

Integral ostidagi $\frac{\sin x}{x}$ funktsiyani qatorga yoyamiz.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Bu tenglikni hadma-had x ga bo'lib

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qator esa x ning barcha qiymatlarida yaqinlashadi. Uni hadlab integrallasak:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a^{2n-2}}{(2n-1)! \cdot (2n-1)} + \dots$$

a har qanday bo'lganda ham qatorning yig'indisini istalgan darajada aniqlik bilan hisoblash mumkin.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ ($k < 1$) elliptik integral hisoblansin.

Yechish:

$$m = \frac{1}{2}, \quad x = -k^2 \sin^2 \varphi \quad \text{deb olib,}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n + \dots, \quad x \in [-1; 1]$$

formula bo'yicha integral ostidagi funktsiyani binomial qatorga yoyamiz:

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot k^6 \sin^6 \varphi - \dots$$

Bu qator φ ning barcha qiymatlarida yaqinlashadi va uni hadlab integrallash mumkin, chunki u ixtiyoriy intervalda kuchaytirilgan qatordir. Shuning uchun

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} \, dt = \varphi - \frac{1}{2}k^2 \int_0^{\varphi} \sin^2 t \, dt - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot k^4 \int_0^{\varphi} \sin^4 t \, dt - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} k^6 \int_0^{\varphi} \sin^6 t \, dt - \dots$$

O'ng tomonda turgan integrallar juda sodda hisoblanadi. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Demak,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{k^6}{5} - \dots \right].$$

7. Nazariy mashqning javobi:

$x=1$, $y=1$, va $y'=0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $y'' = xy$ differensial tenglamaning yechimi qator shaklida topilsin.

Yechish:

Echimni $y = a_0 + a_1 \cdot (x-1) + a_2 \cdot (x-1)^2 + \dots + a_n \cdot (x-1)^n + \dots$ qator ko'rinishida izlaymiz. Ma'lumki, bu qatorning koeffitsientlari Teylor koeffitsientlaridir, ular y

funktsiyaning $x=1$ nuqtadagi hosilalari orqali quyidagi formulalar orqali

ifodalanadi:

$$a_0 = f(1), \quad a_1 = f'(1), \quad a_2 = \frac{f''(1)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(1)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}, \dots$$

Bunda ushbu belgilashlar kiritamiz: $f(1) = y|_{x=1} = 1$, $f'(1) = y'|_{x=1} = 0$, $(y'')_{x=1} = f''(1) = 1$. Berilgan tenglamani bir necha marta differentsiallab va hosilalarning $x=1$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz. Shunday qilib:

$$y''' = y + x \cdot y', \quad f'''(1) = y'''|_{x=1} = 1;$$

$$y^{1v} = 2y' + x \cdot y'', \quad f^{1v}(1) = y^{1v}|_{x=1} = 1;$$

$$y^v = 3y'' + x \cdot y''', \quad f^v(1) = y^v|_{x=1} = 4;$$

$$y^{v1} = 4y''' + x \cdot y^{1v}, \quad f^{v1}(1) = y^{v1}|_{x=1} = 5; \quad \text{va h. k.}$$

Hosilalarning bu topilgan qiymatlarini qator koeffitsientlarining formulalariga qo'yamiz va quyidagilarni topamiz:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}, \quad a_5 = \frac{4}{5!} = \frac{1}{30}, \quad a_6 = \frac{5}{6!} = \frac{1}{144}, \dots$$

Shunday qilib, tenglamaning

$$y = 1 + \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{6} \cdot (x-1)^3 + \frac{1}{24} \cdot (x-1)^4 + \frac{1}{30} \cdot (x-1)^5 + \frac{1}{144} \cdot (x-1)^6 + \dots$$

Qator ko'rinishidagi echimiga ega bo'lamiz. Echishning bu usulini har qanday tartibli tenglamaga uchun qo'llash mumkin.

8. Nazariy mashqning javobi:

$-\pi < x \leq 0$ bo'lganda $f(x)=x$ va $0 \leq x \leq \pi$ bo'lganda $f(x)=2x$ bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

Yechish:

Fur'e koeffitsientlarini aniqlaymiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x dx + \int_0^{\pi} 2x dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 + x^2 \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 \right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x \cdot \cos kx dx + \int_0^{\pi} 2x \cdot \cos kx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \cdot \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \sin kx dx \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x \cdot \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = \frac{1}{\pi k} \left[\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{2 \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi k^2} (1 - \cos \pi k) + \\ &+ \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \frac{1}{\pi k^2} \cdot (\cos \pi k - 1) = \begin{cases} k & \text{juft bo'lsa,} \\ k & \text{toq bo'lsa,} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \\ -\frac{2}{\pi k^2} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin kx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \cdot \cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2x \cdot \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right) + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx = -\frac{\cos k\pi}{k} - \frac{2 \cos k\pi}{k} = -\frac{3 \cdot \cos k\pi}{k} = \begin{cases} k & \text{toq bo'lsa} \\ k & \text{juft bo'lsa} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{k} \\ -\frac{3}{k} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cdot \left(\cos kx + \frac{1}{3^2} \cdot \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cdot \cos 5x + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \cos(2k-1)x + \dots \right) + \\ &+ \frac{3}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin kx}{k} + \dots \right). \end{aligned}$$

1-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$$

2. Leybnits teoremasiga asosan qatorning yig'indisi 0,0001 gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \dots$$

4. $\phi(x) = \sin^2 x$ funksiya Makloren qatoriga yoyilsin.

5. Binominal qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{1,004}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' = x^2 y, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y = 1, \quad y' = 1.$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 6$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx$$

9. $0 < x \leq \pi$ bo'lganda $f(x) = 2x$ bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

2-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{40}} + \dots$$

1. Leybnits teoremasiga asosan qatorning yig'indisi 0,001 gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

2. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} - \frac{x^4}{2^4} + \dots$$

3. $\phi(x) = xe^x$ funksiya Makloren qatoriga yoyilsin.

4. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{0,992}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$yy' = 1 + x + y, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y=1$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\sin 18^\circ$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{1/6} \sqrt[3]{1+x^2} dx$$

9. $f(x)=1$ funksiya $x \in (0; \pi)$ intervalda sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoyilsin; undan

foydalanib $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ qatorning yig'indisi topilsin.

3-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots$$

2. Leybnits teoremasiga asosan qatorning yig'indisi 0,001 gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots$$

X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$(3x)^2 + (3x)^4 + (3x)^9 + \dots + (3x)^{n^2} + \dots$$

3. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{90}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y' = x^2 + y^2, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y=0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\sin 10^\circ$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{0,5} \cos \frac{x^2}{4} dx$$

9. $f(x)=x^2$ funksiyaning Fur'e qatoridan foydalanib $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ qatorning yig'indisi topilsin.

4-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{10}} + \dots$$

2. Leybnits teoremasiga asosan qatorning yig'indisi 0,0001 gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$1 + \frac{10x}{1 \cdot 3} + \frac{100x^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1000x^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{10000x^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{1,006}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' + xy = 0, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, \quad y' = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\cos 18^\circ$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

9. $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

5-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

2. Leybnits teoremasiga asosan qatorning yig'indisi 0,001 gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sin x + 2 \sin \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{9} + \dots + 2^n \sin \frac{x}{3^n} + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = 1 + e^{2x}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{0,991}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, \quad y' = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 15$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,01$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

9. $-\pi \leq x < 0$ bo'lganda $f(x) = -\frac{\pi+x}{2}$, $0 \leq x < \pi$ bo'lganda $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

6-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \left(\frac{4}{5}\right)^{16} + \dots$$

2. Leybnits teoremasiga asosan qatorning yig'indisi 0,00001 gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\frac{x}{1+\sqrt{1}} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3+\sqrt{3}} + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = (1+x) \ln(1+x)$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{130}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' + xy' + y = 0, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 0, y' = 1$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 18$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,01$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2) dx$$

9. $-\pi < x \leq 0$ bo'lganda $f(x) = -x$, $0 < x \leq \pi$ bo'lganda $f(x) = 0$ bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

7-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \dots$$

2. Leybnits teoremasiga asosan qatorning yig'indisi 0,001 gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} - \frac{1}{4 \cdot 5^2} + \dots$$

3. x ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$x + \frac{2^x}{2!} x^2 + \frac{3^x}{3!} x^3 + \frac{4^x}{4!} x^4 + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = (1+x)e^{-x}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{1,005}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, y' = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ell_{n21}$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}} dx$$

9. $-\pi < x \leq 0$ bo'lganda $f(x) = 1$, $0 < x \leq \pi$ bo'lganda $f(x) = -2$ bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

8-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{6} + \frac{4}{11} + \dots + \frac{n+1}{n^2+2} + \dots$$

2. Leybnits teoremasiga asosan qatorning yig'indisi 0,001 gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$x + \frac{2!}{2^2} x^2 + \frac{3!}{3^3} x^3 + \frac{4!}{4^4} x^4 + \frac{5!}{5^5} x^5 + \frac{6!}{6^6} x^6 + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{1,0012}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$(1-x)y'' - xy' = 0, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y=0, \quad y'=1$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 7$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{0,5} \frac{\arctg x}{x} dx$$

9. $f(x) = x^2$ bo'lgan funksiya $x \in (0; \pi)$ intervalda sinuslar bo'yicha qatorga yoyilsin.

9-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$x + \frac{2^2}{4!} x^2 + \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2}{6!} x^3 + \frac{(4!)^2}{8!} x^4 + \frac{(5!)^2}{10!} x^5 + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{0,993}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = 0, \quad x=0 \text{ bo'lganda, } y=0, \quad y'=1$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 14$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$$

9. $f(x) = \cos 2x$ bo'lgan funksiya $x \in (0; \pi)$ intervalda sinuslar bo'yicha qatorga yoyilsin.

10-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{16}} + \frac{1}{\sqrt[3]{25}} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{9^2} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \frac{x^4}{3^4 \cdot 5} + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = e^x \sin x$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{0,997}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' = xy y', \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, y' = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 24$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

9. $f(x) = \sin x$ bo'lgan funksiya $x \in (0; \pi)$ intervalda kosinuslar bo'yicha qatorga yoyilsin.

11-Variant

1. Umimiy hadi $U_n = \frac{1}{n^3}$ bo'lgan qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} - \frac{1}{4 \cdot 16} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$1 - \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{x^3}{5^2\sqrt{3}} - \frac{x^5}{5^3\sqrt{4}} + \dots$$

3. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{110}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$(1-x)y' = 1+x-y, \quad x=0 \text{ bo'lganda, } y=0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 16$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$$

9. $f(x) = e^x$ bo'lgan funksiya $x \in (-1; 1)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

12-Variant

1. Umimiy hadi $U_n = \frac{2}{5n-1}$ bo'lgan qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$1 - \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} - \frac{1}{\sqrt[5]{4}} + \frac{1}{\sqrt[5]{5}} - \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{\arctg x}{x}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{70}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$xy'' + y = 0, \quad x = 0 \text{ bo'lganda, } y = 0, \quad y' = 1$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 22$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$$

9. $f(x) = 2x$ bo'lgan funksiya $x \in (0;1)$ intervalda sinuslar bo'yicha qatorga yoyilsin.

13-Variant

1. Umimiy hadi $U_n = \frac{1+n}{3+n^2}$ bo'lgan qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[6]{40}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, y' = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 30$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^4} dx$$

9. $f(x) = x$ bo'lgan funksiya $x \in (0; \ell)$ intervalda sinuslar bo'yicha qatorga yoyilsin.

14-Variant

1. Umimiy hadi $U_n = \frac{1}{n^2 + 2n + 3}$ bo'lgan qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \frac{1}{5 \ln 5} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2) \cdot 2^n}}$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{26}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, y' = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\cos 10^0$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

9. $0 < x \leq 1$ bo'lganda $f(x) = x$, $1 < x < 2$ bo'lganda $f(x) = 2 - x$ bo'lgan funksiya $x \in (0; 2)$ intervalda sinuslar bo'yicha qatorga yoyilsin.

15-Variant

1. Umimiy hadi $U_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ bo'lgan qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \arctg x$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{50}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' = e^y + x, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, \quad y' = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 3$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

9. $-\pi < x \leq \pi$ bo'lganda $f(x) = x$ bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

16-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{80}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y' = \sin y - \sin x, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 12$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} dx$$

9. $-\pi < x \leq 0$ bo'lganda $f(x) = -x$, $0 < x \leq \pi$ bo'lganda $f(x) = x$, bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

17-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{16} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2^n}{n^4} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot n!$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{92}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' = yy' - x^2, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y=1, \quad y'=1$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 8$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx$$

9. $-\pi < x < 0$ bo'lganda $f(x) = -1$, $0 \leq x \leq \pi$ bo'lganda $f(x) = 1$, bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

18-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cdot n!}{(n+1)^n}$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{130}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y' = x^2 + y^3, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = \frac{1}{2}$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 10$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

9. $f(x) = x^2$, bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

19-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \cos^2 x$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{0,994}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y' = x^2 - y^2, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\sin 24^\circ$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx$$

9. $-\pi < x < 0$ bo'lganda $f(x) = 0$, $0 < x \leq \pi$ bo'lganda $f(x) = x$, bo'lgan funksiya $x \in (-\pi; \pi)$ intervalda Fur'e qatoriga yoyilsin.

20-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \frac{16}{5!} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$(2x-3) - \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} - \frac{(2x-3)^4}{7} + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2)$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{0,99}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y' = x^2 y^2 - 1, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\sin 24^\circ$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{0,5} \sin(x^2) dx$$

9. $0 < x \leq 1$ bo'lganda $f(x) = x$, $1 < x < 2$ bo'lganda $f(x) = 2 - x$, bo'lgan funksiya $x \in (0; 2)$ intervalda kosinuslar bo'yicha qatoriga yoyilsin.

21-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \ln(1 - x + x^2)$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{0,09}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y' = e^y + xy, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 0$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\cos 12^\circ$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 e^x dx$$

9. $0 < x \leq 2\pi$ bo'lganda $f(x) = x$, bo'lgan funksiya Fur'e qatoriga yoyilsin.

22-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \frac{3^4}{2^4 \cdot 9} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \frac{16x^4}{\sqrt{17 \cdot 5^4}} + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{120}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' = y \cos x + x, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y=1, \quad y'=0.$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\sin 12^\circ$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$$

9. $f(x) = x$, bo'lgan funksiya $x \in [0; \pi]$ intervalda sinuslar bo'yicha qatorga yoyilsin.

23-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$1 + \frac{3!}{2 \cdot 4} + \frac{5!}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{(2n-1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} - \frac{1}{4 \cdot 5^2} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt{0,993}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, \quad y' = 0.$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 15$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

9. $f(x) = x$, funksiya $x \in [0; \pi]$ oraliqda kosinuslar bo'yicha qatorga yoyilsin.

24-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4 \cdot 3^4}} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{500}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' = xy y', \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 1, \quad y' = 0.$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\ln 10$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x} dx$$

9. $f(x) = |x|$, bo'lgan funksiya $x \in [-\ell; \ell]$ oraliqda Fur'e qatoriga yoyilsin.

25-Variant

1. Qatorning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$\frac{21}{3} + \frac{41}{9} + \frac{61}{27} + \frac{81}{81} + \dots$$

2. Berilgan qatorning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin:

$$\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \dots$$

3. X ning qanday qiymatlarida qator yaqinlashadi?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

4. Quyidagi funksiya Makloren qatoriga yoyilsin:

$$f(x) = \frac{1}{4-x^4}$$

5. Qator yordamida ildizning qiymati taqribiy hisoblansin:

$$\sqrt[3]{130}$$

6. Qatorlar yordami bilan berilgan differensial tenglamaning yechimi topilsin:

$$y'' = \frac{xy'}{1-x^2}, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y=0, \quad y'=1.$$

7. Qatorlar yordamida taqribiy hisoblansin:

$$\sin 9^\circ$$

8. Integralning qiymati $\varepsilon = 0,001$ gacha aniqlik bilan taqribiy hisoblansin:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

9. Davri 2π ga teng bo'lgan juft funksiya $x \in [-\pi; \pi]$ oraliqda $f(x) = x$, tenglik bilan berilgan. Shu funksiyaning Fur'e koeffitsientlari hisoblansin va qatorga yoyilsin.

1-Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi sonli qatorlarni yaqinlashuvchilikka tekshiring:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+8}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2-1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(2n+1) \cdot 9^n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n+1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{e^n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{6^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{6^n \cdot (n+8)}$
9. $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^3}{n^4+3}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n}}{n^2+1}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3} \right)^{2n^2}$
15. $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{n \cdot \ln^3 n}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n+1}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n \cdot (n+1)}$
19. $\sum_{i=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2-4}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{2n^2+n}$
21. $\sum_{n=1}^n \frac{n^4}{2n-1}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n^2+1)}{n^3+8}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2n+2}{5n+3}} \right)^n$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$
32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^n}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{1+n^3}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{\sqrt{5}} \right)^n$
37. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1} \right)^n$
38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{\ln n}}{n}$
39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n \cdot (n+1)}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}$

$$\begin{aligned}
 &41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5^n \cdot (n+2)} \quad 42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}} \quad 43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \quad 44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} \quad 45. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \\
 &46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2-1} \quad 47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad 48. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+1} \right)^n \quad 49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} \quad 50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n} \\
 &51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)^n} \quad 52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln a}{n} \quad 53. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^5 + 2n^2}{2n^5 + 3n^4} \right)^n \quad 54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n} \\
 &55. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n \quad 56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad 57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2-4} \quad 58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{5^n} \quad 59. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n-5} \right)^{n^2} \\
 &60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3n}{6n-4}
 \end{aligned}$$

2-Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va oralig'ini toping:

$$\begin{aligned}
 &1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{n} \cdot x^n \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+1)^n} \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot (n+1)} \cdot x^n \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot x^n \\
 &6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^n} \cdot x^n \quad 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(n+1)^n} \cdot x^n \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot x^n}{4n^2-1} \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2) \cdot (n+1)} \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2+9} \cdot x^n \\
 &11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n \cdot (n+1)} \cdot x^n \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{5^n \cdot (n+1)} \quad 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{n^2-4}} \quad 14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot x^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n \cdot (2n+3)} \cdot x^n & \quad 16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+7} \right)^n \cdot x^n & \quad 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \cdot x^n & \quad 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4^n \cdot (n+2)} \cdot x^n \\
 19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot x^n}{(n+2) \cdot (n+1)} & \quad 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt{2^n \cdot (3n+1)}} & \quad 21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot (n+2)} \cdot x^n & \quad 22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} \cdot x^n \\
 23. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1} \right)^n \cdot x^n & \quad 23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-1)^n}{9^n \cdot n} & \quad 24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n} & \quad 25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot x^n \\
 26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+7} \right)^n \cdot (x-5)^n & \quad 27. \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n & \quad 28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+4)^n}{\sqrt{n}} & \quad 29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+4} \cdot x^n
 \end{aligned}$$

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar

3-Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning xususiy hosilalari topilsin:

$$\begin{aligned}
 1. \quad u &= x \cdot e^{-y \cdot x}, & \frac{\partial u}{\partial x} &=? \\
 2. \quad z &= (5x^3y^2 + 1)^3, & \frac{\partial z}{\partial y} &=? \\
 3. \quad u &= \sin(xy), & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &=? \\
 4. \quad z &= \sin(xy), & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &=? \\
 5. \quad u &= \sin(xy), & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &=? \\
 6. \quad u &= \frac{y}{x}, & \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} &=? \\
 7. \quad z &= \frac{y}{x}, & \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &=? \\
 8. \quad u &= e^{xyt}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} &= u''_{yt} -? \\
 9. \quad z &= e^{xyt}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} &= u''_{xt} -? \\
 10. \quad u &= e^{xyt}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= u''_{xy} -? \\
 11. \quad u &= e^{xyt}, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= u''_{tt} -? \\
 12. \quad u &= e^{xyt}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u''_{xx} -?
 \end{aligned}$$

13. $u = e^{xyt}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy} - ?$
14. $z = \arcsin(t \cdot \sqrt{x})$, $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$
15. $z = \arcsin(t \cdot \sqrt{x})$, $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$
16. $u = x \cdot e^{-y \cdot x}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = ?$
17. $u = x \cdot e^{-y \cdot x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = ?$
18. $z = e^{xy^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$
19. $z = e^{xy^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$
20. $z = \ln(e^x + e^y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$
21. $z = x^3 + x \cdot y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ?$
22. $z = \ln(e^x + e^y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$
23. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?$
24. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?$
25. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = ?$
26. $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = ?$
27. $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = ?$
28. $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = ?$
29. $u = \frac{x \cdot y}{x - y}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = ?$
30. $u = \frac{x \cdot y}{x - y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = ?$
31. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ funksiyaning ekstremumini toping.
32. $z = xy^2(1 - x - y)$ ($x > 0, y > 0$) funksiyaning ekstremumini toping.
33. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ funksiyaning ekstremumini toping.
34. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ($x > 0, y > 0$) funksiyaning ekstremumini toping.
35. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ ($x > 0, y > 0$) funksiyaning ekstremumini toping.
36. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ funksiyaning ekstremumini toping.
37. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ funksiyaning ekstremumini toping.

Diferentsial tenglamalar**4-Mustaqil yechish uchun misollar****Quyidagi differensial tenglamalarni yeching:**

1. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$
2. $y'' = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$
3. $y''' - 8y = 0$
4. $y'' + 2y' - 8y = 3x$
5. $\sqrt{1+x^2} \cdot y' = -xy$
6. $\frac{ds}{dt} \cdot \cos t + s \cdot \sin t = 1$
7. $y'' = -\frac{1}{16x} - 6x$
8. $y'' - 5y = 5x$
9. $ydx + (x+1)dy = 0$
10. $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$
11. $y''' = 8\cos 2x - 1$
12. $y'' - 3y' - 4y = x^2 + 1$
13. $y' = 3x^2 - 2x + 1$
14. $(t-s)dt + tds = 0$
15. $y''' = -8\sin 2x + 4$
16. $y'' - 2y' = x + 3$
17. $y' = y^2$
18. $(2\sqrt{st} - s)dt + tds = 0$
19. $y''' \cdot y^3 = 1$
20. $y'' - y' = x^3$
21. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$
22. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$
23. $2yy'' = 1 + (y')^2$
24. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$

$$25. (x + y)dx + (y - x)dy = 0$$

$$26. y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$$

$$27. y'' - 7y' = 0$$

$$28. y'' - 5y' + 4y = e^x$$

$$29. \frac{dy}{\sin x} + \frac{dx}{y} = 0$$

$$30. (x + y)dx + xdy = 0$$

$$31. 2yy'' = (y')^2$$

$$32. y'' + 4y' = \cos 2x$$

$$33. y' = x(y^2 + 1)$$

$$34. (y - x)dx + (y + x)dy = 0$$

$$35. y'' = \frac{1}{2y'}$$

$$36. y'' + y = e^x + \sin x + 2\cos x$$

$$37. y^2 dy + xdx = 0$$

$$38. xdy + ydx = e^x(1 + x)dx$$

$$39. xy''' = 2$$

$$40. y'' - 9y' + 14y = e^{2x}$$

$$41. \frac{dy}{dx} + xy = 2x$$

$$42. \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2$$

$$43. y'' = a^2 y$$

$$44. y'' + 2y' + y = e^{-3x}$$

$$45. \frac{dy}{x} = \frac{1}{x} e^{x-y} dx$$

$$46. y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

$$47. y'' = \frac{a}{y^3}$$

$$48. y'' + 2y' + 2y = \sin x$$

$$49. \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 1}$$

$$50. y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

51. $y'' + (y')^2 = a^2$
52. $y'' + 4y = \cos 2x$
53. $y' \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+y^2}$
54. $xy' - 3y = -x^2$
55. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$
56. $y'' - 3y' = x^2 - e^{3x}$
57. $y' = e^{x+y}$
58. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x$
59. $y'' = 9y$
60. $y'' - y' - 2y = e^{2x} + e^{-x}$
61. $(x-1)dx + ydy = 0, \quad y(0) = 1$
62. $y' + y \cos x = \sin x \cos x$
63. $y''' = (y'')^2$
64. $y'' + 9y = 15 \sin 2x, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 0$
65. $\frac{2x+1}{y+1} = \frac{dy}{dx}, \quad y(4) = 2$
66. $y' - \frac{4}{x}y = \frac{x+1}{x}$
67. $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$
68. $y'' - 3y' = 3x^2 + x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{70}{27}$
69. $(1+x^2)dx - xy = 2x$
70. $y''' = \frac{12}{x^3} - 1$
71. $y'' + 12y = 7y'$
72. $y'' + y' = 2x^2 e^x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 0.5$
73. $(1+y^2)dx - xydy = 0$
74. $x dy - (y + \sqrt{y^2 + x^2})dx = 0$
75. $y'' = \frac{1}{x} - \sin x$
76. $y'' + 6y' + 9y = 5e^{-3x}$

$$77. \frac{dy}{\sin x} + \frac{dx}{2} = 0, \quad y(0) = 1$$

$$78. \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

$$79. y'' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} + 1$$

$$80. y'' + 16y = \sin 4x$$

$$81. \frac{dy}{e^x} + \frac{dx}{3} = 0, \quad y(0) = -1$$

$$82. y^{(IV)} = \frac{27}{10x^5}$$

$$83. y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$84. y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$$

$$85. y' \operatorname{tg} x = y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$86. yy'' - 2(y')^2 = 0$$

$$87. y'' + 36y = 0$$

$$88. y'' - 7y' + 12y = x$$

$$89. e^x dx - 2dy = 0, \quad y(0) = 0$$

$$90. xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$$

$$91. y''' = e^{-x} - 1$$

$$92. s'' - a^2 s = t + 1$$

$$93. y' = y \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$94. y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

$$95. y'' = \frac{3}{x} - x$$

$$96. y'' - 2y' + 3y = e^x \cos x$$

$$97. \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - x dy = 0$$

$$98. y''' = \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$99. y'' - 2y' = 0$$

$$100. y'' - y = 5x + 2$$

$$101. \sqrt{y+3}dx + \sqrt{x+2}dy = 0$$

$$102. (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$$

$$103. y''' = 27\sin 3x + a$$

$$104. y'' - 3y' = 2 - 6x$$

$$105. ydx = (x + y)dy$$

$$106. y''' - 16 = 0$$

$$107. y'' - 7y' + 6y = 0$$

$$108. y'' + 9y = 6e^{3x}$$

$$109. y^4 dy + \frac{x^2}{3} dx = 0$$

$$110. y'' - e = 1$$

$$111. y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$$

$$112. s'' - 2as' + a^2s = e^t$$

$$113. \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 1}$$

$$114. xy' = x \sin \frac{y}{x} + y = 0 *$$

$$115. y^{IV} - 16 = 0$$

$$116. y'' + y' = 2x^2 e^x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 0.5$$

$$117. y' = e^{x+y}$$

$$118. y' = \frac{x}{y} \ln \frac{y}{x}$$

$$119. y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$$

$$120. y'' + 16y = \sin 4x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

**Foydalanilgan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar
ro'yxati**

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
2. W W L Chen "LINEAR ALGEBRA", London, Chapter 1-12, 1983, 2008.
3. W W L Chen "Introduction to Fourier Series", London, Chapter 1-8, 2004, 2013.
4. W W L Chen "Fundamentals of Analysis", London, Chapter 1-10, 1983, 2008.
5. Жўраев Т., Саъдуллаев А., Худойбергенов Г., Мансуров Х., Ворисов А. Олий математика асослари. Т.1., Тошкент, "Ўқитувчи", 1995.
6. Жўраев Т., Саъдуллаев А., Худойбергенов Г., Мансуров Х., Ворисов А. Олий математика асослари. Т.2., Тошкент, "Ўзбекистон", 1999.
7. Соатов Ё.У Олий математика. Т., Ўқитувчи, 1995. 1- 5 қисмлар.
8. N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010.
9. Латинов Х.Р., Таджиев Ш. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Тошкент, "Ўзбекистон". 1995.
10. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, - Тошкент.: Ўқитувчи, 1-қисм, 1989.
11. Латинов Х.Р., Носиров Ф.У., Таджиев Ш.А. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебрадан масалалар ечиш бўйича қўлланма. Тошкент, Фан, 1999.

Internet saytlari

1. www.Ziyonet.uz
2. www.tuit.uz
3. www.Math.uz
4. www.bilim.uz
5. www.gov.uz

GLOSSARIY

Inglizcha	O'zbekcha	Ruscha	Izoh
Numeral sequence	Sonli ketma-ketlik.	Числовая последовательность	Sonli ketma-ketlik. Natural sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga mos qo'yuvchi akslantirishga sonli ketma-ketlik deyiladi. Hamda $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ko'rinishida yoziladi.
Limit of Numeral sequence	Sonli ketma-ketlik limiti.	Предел числовой последовательности	Sonli ketma-ketlik limiti. a soni $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik limiti deyiladi, agar $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\exists n_0 \in N$ son topilib, $\forall n > n_0$ natural son uchun $ x_n - a < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa. $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik limiti quyidagicha yoziladi: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
Converges	Yaqinlashuvchi .	Сходящийся	Yaqinlashuvchi. $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik uchun yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi a soni mavjud bo'lsa, bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi.
Uniqueness of the limit	Limitning yagonaligi	Единственность предела	Limitning yagonaligi. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.
Bounded	Chegaralangan .	Ограниченный	Chegaralangan. $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi, agar $\forall n \in N$ uchun $\exists M > 0$ soni topilib $ x_n \leq M$ tengsizlik bajarilsa.
Finite	Chekli.	Конечный	Chekli. Aniq bir qiymatga ega bo'lgan kattalik.
Infinite	Cheksiz.	Бесконечный	Cheksiz. Haqiqiy sonlar to'plamining yuqori chegarasi, quyi chegarasi. Shartli ravishda cheksiz deyiladi.

Compactness	Kompaktlik	Компактный	Kompaktlik. Agar $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, limiti o'ziga tegishli bo'lsa u holda bunday ketma-ketlikka kompakt deyiladi.
Continuity	Uzluksizlik.	Непрерывность	Uzluksizlik. $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ o'rinli bo'lsa.
Cauchy sequences	Koshi ketma-ketligi.	Последовательность Коши	Koshi ketma-ketligi. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlikka Koshi ketma-ketligi deyiladi. $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ son topilib, $\forall n > n_0$ va $\forall m > n_0$ natural sonlar uchun $ x_n - x_m < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.
Fundamental sequences	Fundamental ketma-ketliklar	Фундаментальные последовательности	Fundamental ketma-ketliklar. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlikka fundamental ketma-ketlik deyiladi. $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ son topilib, $\forall n > n_0$ va $\forall m > n_0$ natural sonlar uchun $ x_n - x_m < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.
inverse function	Teskari funksiya	Обратная функция	Teskari funksiya. $y = f^{-1}(x)$ funksiya $y = f(x)$ funksiyaning teskarisi deyiladi, agar $x = f(y)$ tenglik o'rinli bo'lsa.
Increasing function	Kamayuvchi funksiya	Убывающая функция	Kamayuvchi funksiya. $y = f(x)$ funksiya o'zining D sohasida kamayuvchi deyiladi, agar $\forall x_1, x_2 : x_1 > x_2$ ekanidan $f(x_1) \leq f(x_2)$ ekani

			kelib chiqsa.
Decreasing function	O'suvchi funksiya	Возрастающая функция	O'suvchi funksiya. $y = f(x)$ funksiya o'zining D sohasida o'suvchi deyiladi, agar $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 > x_2$ ekanidan $f(x_1) \geq f(x_2)$ ekani kelib chiqsa.
a map	Akslantirish	Отображение	Akslantirish. X to'plamning har bir elementiga Y to'plamning yagona elementini mos qo'yishga aytiladi.
Function	Funksiya	Функция	Funksiya. R haqiqiy sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga mos qo'yuvchi akslantirishga aytiladi
Domain region	Aniqlanish soha	Область определения	Aniqlanish soha. Argumentning qabul qila olishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamiga aytiladi. Hamda $domf$ bilan belgalaymiz.
Image region	Qiymatlar sohasi	Область значения	Qiymatlar sohasi. Funksiyaning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari sohasiga aytiladi.
Odd function	Toq funksiya	Нечетная функция	Toq funksiya. $\forall x \in domf$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglikni qanoatlantiradigan funksiyalarga aytiladi.
Even function	Juft funksiya	Четная функция	Juft funksiya. $\forall x \in domf$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglikni qanoatlantiradigan funksiyalarga aytiladi.
Period of function	Funksiyaning davri	Период функции	Funksiyaning davri. $\forall x \in domf$ uchun $\exists T \in R$ topilib $f(x+T) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda T soni funksiyaning davri deyiladi.
Bounded function	Chegaralangan funksiya	Ограниченная функция	Chegaralangan funksiya. $y = f(x)$ funksiya chegaralangan deyiladi, agar $\exists M > 0$ soni topilib $ f(x) \leq M$ tengsizlik bajarilsa.

The limit of a function on a point (Heyne definition)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo'yicha)	Предел функции в точке (определение Гейне)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo'yicha). Agar $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in X$, $x_n \neq x_0$) bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n \rightarrow \infty$ da $f(x_n) \rightarrow b$ bo'lsa, b ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va $x \rightarrow x_0$ da $f(x) \rightarrow b$ yoki $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ kabi belgilanadi.
The limit of a function on a point (Cauchy definition)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha)	Предел функции в точке (определение Коши)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilsaki, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun $f(x) - b < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$. Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$: $f(x) - b < \varepsilon$ bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.
Limit point	Limit nuqta	Предельная точка	Limit nuqta. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, ($\forall \varepsilon > 0$) atrofida X to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$, $x \neq x_0$: $x - x_0 < \varepsilon$ bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Increment of argument	Argument orttirmasi	Приращение аргумента	Argument orttirmasi. Argument orttirmasi deb argument yangi qiymatidan dastlabki qiymatning ayirmasi tushuniladi va u quyidagicha belgilanadi.ar $\Delta x = x - x_0$
Real function	Haqiqiy funksiya	Действительная функция	Haqiqiy funksiya. Faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qila oladigan funksiyalarga haqiqiy funksiya deb ataladi.
Real variable	Haqiqiy o'zgaruvchili	Действительная переменная	Haqiqiy o'zgaruvchili. Haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan funksiyaga haqiqiy o'zgaruvchili funksiya deyiladi.
neighborhood	Atrof	Окрестность	Atrof . x_0 nuqtaning ε atrofi deb quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x \in R$ nuqtalar to'plamiga aytiladi: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$
Independent variable	Erkli o'zgaruvchi	Независимая переменная	Erkli o'zgaruvchi. Erkli o'zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan o'zgaruvchiga aytiladi.
Derivative	Hosila	Производная	Hosila. Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi qiymatiga funksiya hosilasi deyiladi.
Secant	Kesuvchi	Секущий	Kesuvchi. Funksiya grafigining ixtiyoriy ikkita nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa aytiladi.
Tangent	Urinma	Касательный	Urinma. Kesuvchining limit holatiga urinma deyiladi.
time	Vaqt	Время	Vaqt. Nisbiy tushuncha bo'lib, o'lchov birligi soat,sekund,minut kabilar bilan o'lchanadigan skalyar o'suvchi miqdordir.
Tangent line	Urinma chiziq	Касательная прямая	Urinma. Kesuvchining limit holatiga urinma deyiladi.
Velocity	Tezli	скорость	Tezlik. Jismning bir sekund ichida bosib o'tgan yo'lga son jihardan teng bo'lgan kattalikka aytiladi,

			O'lchov birligi metr/sekund
komposition	kompozitsiya	Композиция	kompozitsiya. $f : X \rightarrow Y$ va $g : Y \rightarrow Z$ akslantirishlar kompozitsiyasi deb quyidagi akslantirishga aytiladi. $h = g \circ f$, bu yerda $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ bo'lib $h : X \rightarrow Z$
Continuous function	Uzluksiz funksiya	Непрерывная функция	Uzluksiz funksiya. $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agar $\forall x_0 \in [a, b]$ uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa.
Invertible map	Bir qiymatli akslantirish	Однозначная отображение	Bir qiymatli akslantirish. $f : X \rightarrow Y$ akslantirish bir qiymatli deyiladi, agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $f(x_1) = f(x_2)$ ekanidan $x_1 = x_2$ kelib chiqsa.
Logarithmic derivative	Logarifmik hosila	Логарифмическая производная	Logarifmik hosila. $y = f(x)$ funksiyaning logarifmik hosilasi deb $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ funlsiyaga aytiladi.
Independent variable	Erkli o'zgaruvchi	Независимая переменная	Bir qiymatli akslantirish. Erkli o'zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan o'zgaruvchiga aytiladi.
Limit point	Limit nuqta.	Предельная точка	Limit nuqta. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $(\forall \varepsilon > 0)$ atrofida X to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \neq x_0 : x - x_0 < \varepsilon$ bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

The theorem of de l'Hopital	Lopital teoremasi	Теорема Лопиталья	Lopital teoremasi. Quyidagi aniqlashliklarni ochishda foydalaniladi. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, \infty^0$ Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ bo'lsa u}$ holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ o'rinli.
Taylor polynomial	Taylor yoyilmasi	Разложение Тейлора	Taylor yoyilmasi. n-tartibli teylor yoyilmasi deb $Tf_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ ko'phadga aytiladi.
Remainder	Qoldiq	Остаток	Qoldiq. n-tartibli teylor qoldig'i deb $o((x - x_0)^n)$ qiymatga aytiladi.
Higher-order derivatives	Yuqori tartibli hosila	Производная высших порядков	Yuqori tartibli hosila. $y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb quyidagi xossani qanoatlantiruvchi funksiya aytiladi: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \text{ xususiyl}$ holda $f^{(0)}(x) = f(x), f^{(1)}(x) = f'(x)$
Continuous function	Uzluksiz funksiya	Непрерывная функция	Uzluksiz funksiya. $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agar $\forall x_0 \in [a, b]$ uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ bo'lsa.}$
Invertible map	Bir qiymatli akslantirish	Однозначная отображение	Bir qiymatli akslantirish. $f : X \rightarrow Y$ akslantirish bir qiymatli deyiladi, agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $f(x_1) = f(x_2) \text{ ekanidan } x_1 = x_2$ kelib chiqsa.
Independent	Erkli o'zgaruvchi	Независимая переменная	Erkli o'zgaruvchi. Erkli o'zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni

variable			mustaqil qabul qila oladigan o'zgaruvchiga aytiladi.
Primitive function	Boshlang'ich funksiya	Первообразная функция	Boshlang'ich funksiya. $y = F(x)$ funksiya $y = f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi, agar $F'(x) = f(x)$ tenglik bajarilsa.
Indefinite integral	Aniqmas integral	Неопределенный интеграл	Aniqmas integral. $y = f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb $y = F(x) + C$ funksiyalar oilasiga aytiladi, bu yerda $C = const$ va quyidagicha belgilanadi. $\int f(x)dx$
Linearity of the integral	Integralning chiziqliligi	Линейность интеграла	Integralning chiziqliligi. Bu quyidagichadir. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$ Bu yerda $\alpha, \beta = const$
Integration by parts	Bo'laklab integrallash	Интегрирование по частям	Bo'laklab integrallash. Bu quyidagicha xossaga ega. $\int u dv = uv - \int v du$
Real variable	Haqiqiy o'zgaruvchili	Действительная переменная	Haqiqiy o'zgaruvchili. Haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan funksiya haqiqiy o'zgaruvchili funksiya deyiladi.
neighborhood	Atrof	Окрестность	Atrof . x_0 nuqtaning ε atrofi deb quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x \in R$ nuqtalar to'plamiga aytiladi: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$