

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

**“OLIY MATEMATIKA.
EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA”
fani bo‘yicha
IV-SEMESTR UCHUN
O‘QUV-USLUBIY MAJMUA**

TOSHKENT-2016



**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

**“OLIY MATEMATIKA.
EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK
STATISTIKA”**

**fani bo‘yicha
IV-SEMESTR UCHUN
O‘QUV-USLUBIY MAJMUA**

Mazkur o'quv uslubiy majmua Oliy va o'rta maxsus ta'limi vazirligining 20____yil
_____dagi _____-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan o'quv reja va dastur asosida
tayyorlandi

Tuzuvchilar:

TATU dotsenti R.R.Raxmatov
TATU kata o'qituvchisi SH.E. Tadjibayeva
TATU assistenti S.K.Shoyimardonov
(OTM nomi, pedagogning ilmiy darajasi, F.I.O)

**O'quv-uslubiy majmua Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Ilmiy-uslubiy
kengashinig 2016 yil _____dagi _____-sonli qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan**

MUNDARIJA

1. FANNING O‘QUV DASTURI.....	5
1.1. NA’MUNAVIY FANDASTURI.....	5
1.2. FANNING ISHCHI-O‘QUV DASTURI.....	20
2. O‘QUV-USLUBIY MATERIALLARI.....	50
2.1. NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MATERIALLARI.....	50
2.2. AMALIY MASHG‘ULOTLAR MATERIALLARI.....	142
3. GLOSSARIY.....	304
4. FAN BO‘YICHA XORIJIY ADABIYOTLAR (elektron shaklda)	
5. HAR BIR MAVZU UCHUN TAQDIMOTLAR (elektron shaklda)	
6. QO‘SHIMCHA O‘QUV VA ILMIY MATERIALLAR (MAQOLALAR)	
(elektron shaklda)	
7. MAVZUNI O‘ZLASHTIRILISHI UCHUN QO‘SHIMCHA VIDEOLAR,	
KEYS-STADILAR VA HOKAZO MATERIALLAR (elektron shaklda)	

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

Ro‘yxatga olindi:

Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

№ _____

201__yil “____” _____

201__yil “____” _____

**OLIJ MATEMATIKA. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA
MATEMATIK STATISTIKA**

FAN DASTURI

Bilim sohasi: 300 000 - Ishlab chiqarish texnik soha.

Ta’lim sohasi: 330 000 - Kompyuter texnologiyalari va informatika”;

350 000 - Aloqa va axborotlashtirish,
telekommunikatsiya texnologiyalari.

Talim yo‘nalishi: 5330 500 - Kompyuter injiniringi (“Kompyuter
injiniringi”, “AT-servis”, “Axborot
xavfsizligi”, “Multimedia
texnologiyalari”);

5330300 - Axborot xavfsizligi (Axborot, kommunikatsiya
texnologiyalari va servis);

5330600 - Dasturiy injiniring;

5350100 - Telekommunikatsiya texnologiyalari
 (“Telekommunikatsiyalar”,

“Teleradioeshittirish”, Mobil tizimlari);

5350200 - Televizion texnologiyalar

(“Audiovizual texnologiyalar”, “Telestudiya
tizimlari va ilovalari”);

5350300 - Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari

sohasida iqtisodiyot va menejment;

5350400 - Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari

sohasida kasb ta’limi;

5350500 - Pochta aloqasi texnologiyasi;

5350600 - Axborotlashtirish va kutubxonashunoslik.

Toshkent 2016

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus talim vazirligining 201__yil “__” _____dagi “__” – sonli buyrug‘ining _____ ilovasi bilan fan dasturi ro‘yxati tasdiqlangan.

Fan dasturi Oliy va o‘rta maxsus, kasb-xunar ta’limi yo‘nalishlari bo‘yicha O‘quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi kengashining 201__ yil “__” _____dagi ____ -sonli bayonnomasi bilan maqullangan

Fan dasturi Toshkent axborot texnologiyalari universitetida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

- | | | |
|-----------------|---|--|
| Raxmatov R.R. | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası mudiri, f.-m.f.n.; |
| Norxo‘jaev O.O. | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası dotsenti, f.-m.f.n.; |
| Mamatov A.E. | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası dotsenti, f.-m.f.n.; |
| Chay Z.S. | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası katta o‘qituvchisi, f.-m.f.n.; |
| Islamova O.A | - | TATU, “Oliy matematika” kafedrası katta o‘qituvchisi, f.-m.f.n. |

Taqrizchilar:

- | | | |
|-----------------|---|--|
| Jabborov N.N. | - | |
| Abduvoitov H.A. | - | M.Ulug‘bek nomli O‘zMU, “Matematik tahlil” kafedrası mudiri, dotsent, f.-m.f.n.; |
| | | TATU “Algoritmlash va matematik modellashirish” kafedrası dotsenti, f.-m.f.n.. |

Fan dasturi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Ilmiy-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqilgan va tavsiya etilgan. (201__ yil “__” _____dagi “__” – sonli bayonnomasi).

Kirish

Ushbu dastur “Ta’lim to’g’risida” hamda “Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi to’g’risida”gi O‘zbekiston Respublikasi qonunlariga muvofiq amalga oshirildi. Oliy matematika fanining asosiy maqsadlaridan biri - hozirgi davr talabiga javob beradigan mutaxassislarni tayyorlashdir. Dastur oliy matematika kursi qismlari va mavzularining asosiy mazmunlarini o‘z ichiga oladi va ularni semestrlar bo‘yicha taqsimlash asosida maxsus va kasbiy fanlar uchun oliy matematika kursining mantiqiy izchilligi va to‘laligini ta’minlaydi.

Fanning maqsad va vazifalari

Ta’lim maqsadi davr bilan, ijtimoiy hayot bilan uzviy bog‘liq. Ijtimoiy hayotdagi tub burilishlar, fanning intensiv rivojlanishi, ta’lim modernizatsiyasi, yangi didaktik imkoniyatlar, insonparvarlashtirish shubhasiz ta’lim maqsadini ham tubdan o‘zgartirdi. Ta’lim maqsadining tubdan o‘zgarishi ta’lim mazmunida o‘z ifodasini topadi. Oliy matematika fani mazmuniga chiziqli algebra elementlari, tekislik va fazodagi analitik geometriya, vektorlar algebrasi, bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning differensial hisobi, integral hisob elementlari, birinchi va ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar hamda qatorlar nazariyasi, karrali, egri chiziqli integrallar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo‘limlari kiritilgan.

Fanni o‘qitishdan maqsad - talabalarda mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlash, matematik taffakkurini shakllantirish va rivojlantirish, o‘zining fikr-mulohaza, xulosalarini asosli tarzda aniq bayon etishga o‘rgatish hamda egallangan bilimlar bo‘yicha, ko‘nikma va malakalarni shakllantirishdir.

Fanning vazifasi - talabalarga umumilmiy, muhandislik va maxsus fanlarni o‘zlashtirish hamda matematik usullarni muhandislik ishlariga tadbiq qilish. Nazariy va amaliy masalalarini yecha olishga yetarli bo‘lgan matematik apraratni egallashga va uni qo‘llashga, shuningdek, muhandislik masalalarining matematik modelini tuzish hamda ularni tahlil qilishga o‘rgatishdan iborat.

Fan bo‘yicha talabalarning tasavvur, bilim, ko‘nikma va malakalariga qo‘yiladigan talablar

“Oliy matematika” fanini o‘zlashtirish jarayonida bakalavr:

- matritsalarini ko‘paytirish, determinantlarni hisoblash, matritsa rangi va teskari matritsani topishni;
- chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini turli usullar bilan yechishni;
- chiziqli va evklid fazolarning ta’riflarini aniq bilishi, vektorlarning chiziqli bog‘liq va chiziqli erkliligini, vektorlar sistemasining rangi va bazisi topishni;
- analitik geometriya elementlarini va ikkinchi tartibli egri chiziqlarni, ularning tenglamalari bo‘yicha tahlil etishni;

- chiziqli operator va kvadratik formalar, differensial va integral hisob, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, differensial tenglamalar, operatsion hisob, karrali, egri chiziqli integrallarni hisoblashni;
- tasodifiy hodisa va murakkab hodisa ehtimolliklarini topishni;
- tasodifiy miqdor taqsimoti va xarakteristikalarini topishni;
- statistik ma'lumotlarni tahlil qilishni;
- noma'lum parametrlarni baxolashni;
- statistik gipotezalarni tekshirishni;
- korrelyatsion va regression taxlilni amalga oshirishni bilishlari kerak.

Bular bilan bir qatorda bakalavr:

- amaliy masalalarda matematik tekshirishning boshlang'ich ko'nikmasini ishlab chiqish (hayotiy masalalarning matematik modelini qurish, uni tekshirish va yechishning qulay usulini tanlash, olingan natijalarni baholash, qo'llash va hokazolar);
- mavjud matematik paketlar yoki axborot texnologiyalardan foydalana olish;
- mavzuga doir misol va masalalarni yechishga mos qulay usulni topa olish;
- matematik masalalarni yechish usullarini mukammal o'zlashtirib, yechimlarni amaliyotda qo'llanish ko'rinishigacha yetkazish (formula, son, grafik va hokazo) va natijada logik va algoritmik fikrlash qobiliyatiga ega bo'lishi kerak;
- talaba mutaxassisligi bilan bog'liq adabiyotlarda uchraydigan matematik apparat tushunchalarini mustaqil tahlil qila olishi, shuningdek, Oliy matematika fanidan olingan bilimlarni mutaxassisligi bilan bog'lay olishi kerak;
- o'z fikr-mulohaza va xulosalarini asosli tarzda aniq bayon eta olish malakalariga ega bo'lishi kerak.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Oliy matematika fani tabiiy-matematik fanlar majmuasiga taalluqli bo'lib, talabalar uni I, II va IV semestrlarda o'rganishadi.

Bu dasturni amalda bajarish uchun talabalar institutgacha bo'lgan davrda elementar matematikadan yetarlicha ma'lumotga ega bo'lishlari lozim.

Oliy matematikaning umumiy kursi bakalavrlar uchun matematik ta'limning asosi bo'lib, shu asosda matematik usullarni kasbiy faoliyatda tatbiq etishlari uchun uni fizika, informatika, axborot texnologiyalari va boshqa fanlar bilan uzviy bog'liqlikda o'rgatish maqsadga muvofiq.

Oliy matematika kursi ishlab chiqarish jarayoni bilan bevosita bog'lanmagan. Lekin u ishlab chiqarishni takomillashtirish bo'yicha muqobil qarorlar qabul qilishda qo'llaniladigan sonli usullarni o'rgatadi shu asosda halq ho'jaligi hamda texnikaning rivojlanishida asosiy va alohida o'rinni egallaydi.

Bunda berilgan ob'ektning xususiyatlaridan kelib chiqqan holda asosiy parametrlar ajratiladi, so'ngra ularning o'zgarish qonuniyatlari va xossalariidan foydalanib, matematik model tuziladi. Modelning muhim parametrlari aniqlanib, tegishli matematik usullar yordamida shu model uchun masalaning maqbul yechimi topiladi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Talabalarning oliy matematika fanini o'zlashtirishlari uchun o'qitishning zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informatsion (Scientific Work Place, Matlap, Mathcad, Mathematica paketlar dasturi va h.k.) va pedagogik texnologiyalarni tatbiq qilish muxim ahamiyatga egadir. Fanni o'zlashtirishda darslik, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruza matnlari, texnologiyalar majmuasi, elektron materiallar, virtual stendlar va maketlaridan foydalaniladi. Ma'ruza, amaliy darslarida mos ravishdagi pedagogik va axborot texnologiyalaridan foydalaniladi.

ASOSIY QISM:

Fanning nazariy mashg'ulotlari mazmuni

Asosiy qismda (ma'ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo'yicha talabalarga DTS asosida o'tkazilishi zarur bo'lgan bilim va ko'nikmalar to'la qamrab olishishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo'yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo'layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o'zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalaridagi islohatlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so'ngi yutuqlari e'tiborga olinishi tavsiya etiladi.

“Oliy matematika” fannining predmet va vazifalari. Matematika – amaliy masalarni yechishda eng kuchli vosita, fanlarning universal tili va ilmiy dunyoqarashning katta bir bo‘lagi. Tabiatda ro‘y beradigan jarayonlarni modellashtrish haqida eng sodda tushunchalar.

Chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari. 2, 3-tartibli determinantlar va ularning xossalari. p – tartibli determinantlar. Hisoblash usullari. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa, matritsa rangi. Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari va ularni matritsalar orqali yozish hamda yechish. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning Kramer, matritsa va Gauss usullari.

Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorning o‘qdagi proeksiyasi. Yo‘naltiruvchi kosinuslar. Vektorlar sistemasining chiziqli bog‘liq va bog‘liqmasligi. Bazis. Dekart koordinatalar sistemasi. Vektorni koordinata o‘qlarida tashkil etuvchilar bo‘yicha yoyish. Qutb koordinatalar sistemasi.

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi, mexanik ma‘nosi, uning xossalari. Vektorning uzunligi, vektorlar orasidagi burchak, vektorlarning ortogonallik sharti.

Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi, uning xossalari.

Vektor ko‘paytmaning mexanik ma‘nosi. Ikki vektorning kollinearlik sharti. Uchta vektorning aralash ko‘paytmasi, uning xossasi, geometrik ma‘nosi. Uch vektorning komplanarlik sharti.

Analitik geometriya (tekislikda). Tekislikda to‘g‘ri chiziqlarning turli ko‘rinishdagi tenglamalari. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikki to‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa bo‘lgan masofa.

Ikkinchi tartibli chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning tenglamalari.

Analitik geometriya (fazoda). Tekislik. Tekislikning turli ko‘rinishdagi tenglamalari. Ikki tekislik orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik sharti. Nuqtadan tekislikka bo‘lgan masofa. Fazoda to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalari. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashuvi.

Matematik analizga kirish. Haqiqiy sonlar to‘plami. Kompleks sonlar. Kompleks sonlarni tasvirlash. Kompleks sonning moduli va argumenti. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Eyler formulasi. Kompleks sonning ko‘rsatkichli shakli. Kompleks sonni darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish.

Chegaralangan, chegaralanmagan, chekli, cheksiz, sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar. Funksiya, funksiya haqida tushuncha. Asosiy elementar funksiyalar, ularning grafiklari.

Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti. Chegaralangan monoton ketma-ketlik limitining mavjudligi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Limitlarning algebraik xossalari. Limitlar haqidagi teoremlar. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar.

Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar, ularning xossalari. Cheksiz kichik miqdorlarni solishtirish.

Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi. Funksiyaning uzilish nuqtalari. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalari.

Bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi, hosilani topish qoidalari. Funksiyaning differensial, hosilaning va differensialning geometrik va fizik ma'nolari. Funksiya grafigiga berilgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari.

Murakkab va teskari funksiyalarning hosilalari. Oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash. Differensial formasining invariantligi, yuqori tartibli hosila va differensiallar.

Roll, Lagranj, Koshi teoremlari va ularni qo'llanilishi.

Aniqmasliklarni ochishning Lopital qoidasi.

Funksiyaning monotonlik sharti. Funksiyaning ekstremumi, ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va burilish nuqtalari. Funksiya grafigining asimptotalari.

Funksiyani tekshirishning va grafigini yasashning umumiy sxemasi va uning tadbiqu.

Integral hisob. Ko'phadlar. Algebraning asosiy teoremasi. Bezu teoremasi. Haqiqiy koeffitsientli ko'phadlarni chiziqli va kvadratik ko'paytuvchilarga ajratish.

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integrallar. Integrallar xossalari va jadvali. Integrallarni hisoblashda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash. Integral osti funksiyalari turli bo'lgan hollarda integrallash usullari.

Aniq integral tushunchasiga keltiruvchi masalalar. Aniq integralning ta'rifi va uning xossalari. Aniq integralning geometrik va fizik ma'nosi.

Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral. N'yuton-Leybnis formulasi. Aniq integrallarni hisoblash.

Xosmas integrallar. Chegaralari cheksiz bo'lgan xosmas integrallar. Uzilishga ega bo'lgan xosmas integrallarning asosiy xossalari. Funksiyalarning xosmas integrallari, ularni hisoblash usullari, yaqinlashish alomatlar. Absolyut va shartli yaqinlashishlar.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida tushuncha. Aniqlanish sohasi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning limiti va uzluksizligi.

Xususiyl hosilalar. To'la differensial. Sirtga o'tkazilgan urinma tekislik va normal.

Yuqori tartibli xususiy hosilalar va to'la differensiallar.

Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Oshkormas funksiyaning differensiallash. Aralash hosilalarning tengligi haqidagi teorema.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumi. Ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari.

Shartli ekstremum. Lagranjning ko'paytuvchilar usuli. Optimal yechimlarni topishga doir misollarni qo'llash.

Oddiy differensial tenglamalar. Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. Birinchi tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Yechimlarning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema. O'zgaruvchilari ajraladigan 1–tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamaning turlari va yechish usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar. Umumiy yechim xaqida teorema. Ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli. O'ng tarafi maxsus ko'rinishda bo'lgan o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar. Differensial tenglamalar sistemasi. Differensial tenglamalar sistemasi va yuqori tartibli differensial tenglamalar orasida bog'lanish.

Operatsion hisob. Laplas almashtirishi. Asl va tasvir. Tasvirlar xossalari, tasvirlar jadvali. Operatsion xisobning asosiy teoremlari. Tasvirga ko'ra aslni tiklash usullari. Originallar o'ramasi va uning xossalari. Dyumel integrali. Differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish usullari. Operatsion hisobni injenerlik masalalariga tadbiqu.

Sonli qatorlar. Sonli qatorlar haqida tushuncha. Qator yaqinlashishi va yig'indisi. Qatorlar ustida amallar. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari. Ishorasi almashinuvchi qatorlar, Leybnis alomati. Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.

Funksional qatorlar. Funksional qatorlar haqida tushuncha. Yaqinlashish va tekis yaqinlashish tushunchalari. Veyershtas alomati. Tekis yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Darajali qatorlarning xossalari. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Darajali qatorlarni differensiallash va integrallash. $(x - a)$ ning darajalari bo'yicha qator. Teylor va Makloren qatorlari. Elementar funksiyalarni Makloren qatoriga yoyish. Binomial qator, $\ln(1 + x)$ funksiyaning darajali qatorga yoyish. Logarifmlarni hisoblash. Aniq integralni qator yordamida hisoblash. Differensial tenglamalarni qator yordamida yechish.

Fure qatori. Fure qatorlari haqida tushuncha, trigonometrik funksiyalar sistemasi. Funksiyalarni Fure qatoriga yoyish. Fure integrali. Kompleks ko'rinishdagi Fure integrali. Furening kosinus va sinus almashtirishlari.

Karrali, egri chiziqli va sirt integrallari. Ikki va uch karrali integrallar ta'rifi. Mavjudlik va o'rta qiymat haqidagi teoremlar. Karrali integrallarda o'zgaruvchilarni

almashtirish. Qutb, silindrik va sferik koordinat sistemalariga o'tish usuli. Dekart koordinat sistemasida karrali integrallarni hisoblash.

1- va 2- tur egri chiziqli integrallar, ularning asosiy xossalari va hisoblash usullari. Grin formulasi. Egri chiziqli integrallarning integrallash yo'liga bog'lik bo'lmashlik sharti. 1- va 2- tur sirt integrallar, ularning xossalari va hisoblash usullari.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Tasodifiylik va qonuniyat. Tasodifiy hodisa va ular ustida amallar. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar algebrasi.

Ehtimollikning klassik, geometrik, statistik ta'riflari. Ehtimollikning aksiomatik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. To'la ehtimol va Bayes formulalari.

Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari.

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang'ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.

Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

Ko'p o'chovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To'g'ri to'rtburchakda tekis taqsimlangan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Katta sonlar qonuni. Chebishev tengsizligi. Chebishev va Bernulli teoremlari. Markaziy limit teoremasi.

Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma taxlili. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va gistogramma. Taqsimot parametrlarining statistik baxolari. Siljimas, effektiv va asosli baholar.

Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlar va haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko'rsatkichli va normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.

Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish soxasi. Kritik nuqtalar. Statistik taxminlarni tekshirishda Pirson va Kolmogorov usullari.

Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalarni aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini aniqlashning yig'indilar va eng kichik kvadratlar usuli.

Amaliy mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha ko'rsatmalar

Amaliy mashg'ulotlarda talabalar oliy matematika fanidan olgan nazariy bilimlarini mustahkamlaydilar. Amaliy mashg'ulotlarda yechiladigan misol va masalalar quyidagi prinsiplarga asosan tanlanadi: tipik misol va masalalarni yechishga malaka hosil qildiruvchi, fanning mohiyatini anglatuvchi va mavzular orasidagi bog'liqlikni ifodalovchi ma'lum miqdordagi misol va masalalar tanlanadi.

Amaliy mashg'ulotlarning taxminiy ro'yxati

- Matritsa va determinantlar;
- Chiziqli tenglamalar sistemasi;
- R^n fazoda vektorlar sistemasi;
- To'g'ri chiziq va tekislik;
- Ikkinchi tartibli chiziqlar;
- Chiziqli va Evklid fazolari;
- Chiziqli va Evklid fazolarda chiziqli operatorlar;
- Ketma – ketlik limiti;
- Funksiya limiti;
- Hosila va differentsiallar;
- Aniqmas integral;
- Aniq integral;
- Xosmas integral;
- Birinchi tartibli differensial tenglamalar;
- Yuqori tartibli differensial tenglamalar;
- Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar;
- Differensial tenglamalar sistemasi;
- Operatsion hisob;
- Sonli qatorlar;
- Funksional qatorlar;
- Fure qatori;
- Karrali, egri chiziqli integrallar;
- Tasodifiy hodisa ehtimolligi ta'riflari;
- Shartli ehtimollik. To'la ehtimol va Bayes formulalari;

- Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi;
- Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar, taqsimot qonuni va sonli xarakteristikalar;
- Tasodifiy miqdorlar bog‘liqsizligi, tasodifiy vektor.
- Tanlanma tahlili;
- Noma’lum parametrlarni baholash;
- Statistik taxminlarni tekshirish;
- Korrelyatsion va regression taxlil.

Laboratoriya ishlarini tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatmalar

Fan bo‘yicha laboratoriya ishlari namunaviy o‘quv rejada ko‘zda tutilmagan.

Kurs ishini tashkil etish bo‘yicha uslubiy ko‘rsatmalar

Fan bo‘yicha kurs ishi namunaviy o‘quv rejasida rejalashtirilmagan.

Mustaqil ta’limning shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ishining asosiy maqsadi – o‘qituvchining rahbarligi va nazoratida muayyan o‘quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko‘nikmalarni shakllantirish va rivojlantirish.

Talaba mustaqil ishini tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalaniladi:

- ayrim nazariy mavzularni o‘quv adabiyotlari yordamida mustaqil o‘zlashtirish;
- berilgan mavzular bo‘yicha axborot (referat) tayyorlash;
- nazariy bilimlarni amaliyotda qo‘llash;
- maket, model va namunalar yaratish;
- ilmiy maqola, anjumanga ma’ruza tayyorlash va h.k..

Amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha kafedra professor – o‘qituvchilari tomonidan ko‘rsatma va tavsiyalar, masalalar to‘plami ishlab chiqiladi. Unda talabalarga asosiy ma’ruza mavzulari bo‘yicha amaliy masala va misollar yechish uslubi va mustaqil yechish uchun masalalar keltirildi.

Tavsiya etilayotgan mustaqil ishlarning mavzulari

1. 2 – tartibli egri chiziqlar va sirtlar.
2. Funktsiyalarni tekshirish. Murakkab funksiyalar grafigini chizish usullari.
3. Aniq integrallar yordamida geometrik va fizik masalalarni yechish hamda ularni tahlil qilish.

4. Shartli ekstremum. Chegaralangan yopiq soxada ikki o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish.
5. Darajali qatorlarning funksiyalarni, aniq integrallarni hisoblashga va differensial tenglamalarni yechishga tatbiqi.
6. Karrali, egri chiziqli va sirt integrallari yordamida geometrik va fizik masalalarni yechish hamda ularni tahlil qilish.
7. Erlang, Pirson, Veybulla va Releya qonunlari.
8. Ko'p o'lchovli normal va tekis taqsimot qonunlari.
9. Xarakteristik va hosil qiluvchi funksiyalar.
10. Ko'p o'lchovli tanlanmaning statistik taxlili.

Dasturning informatsion – uslubiy ta’minoti

Mazkur fanni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy ilg‘or interfaol usullaridan, pedagogik va axborot – kommunikatsiya texnologiyalarining prezentatsiya (taqdimot), multimedia va elektron-didaktik texnologiyalardan foydalaniladi. Amaliy mashg‘ulotlarda aqliy hujum, klaster, blis-so‘rov, guruh bilan ishlash, insert, taqdimot, keys stadi kabi usul va texnikalardan keng foydalaniladi.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro‘yxati

Asosiy adabiyotlar:

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
2. Jo‘raev T., Sa’dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.1., Toshkent, “O‘qituvchi”, 1995.
3. Jo‘raev T., Sa’dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.2., Toshkent, “O‘zbekiston”, 1999.
4. Soatov Yo.U Oliy matematika. T., O‘qituvchi, 1995. 1- 5 qismlar.
5. N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010.
6. Latipov X.R., Tadjiev Sh. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, "O‘zbekiston". 1995.
7. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O‘qituvchi, 2001.

Qo‘shimcha adabiyotlar:

1. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz, - Toshkent.: O‘qituvchi, 1-qism, 1989.
2. Latipov X.R., Nosirov F.U., Tadjiev Sh.A. Analitik geometriya va chiziqli algebradan masalalar yechish bo‘yicha qo‘llanma. Toshkent, Fan, 1999.
3. A.Yusupov, X.A.Axmedova, A.Tilavov. «Ko‘p argumentli funksiyalarning integrallari. Maydonlar nazariyasi». Toshkent, 2011.
4. Piskunov N.S. Differentsialnoe i integralnoe ischislenie dlya VTUZov. -M.: Nauka, v 2x chastyax, 2001.
5. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo‘llanma. Toshkent, O‘qituvchi, 2001.
6. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi kursi. T. O‘qituvchi, 1980.
7. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Differentsialnye uravneniya. Kratnie integrali. Radi. Funksii kompleksnogo peremennogo. - Nauka, 1997.
8. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Elementi lineynoy algebry i analiticheskoy geometrii. - M.: Nauka, 1988.
9. Kletenik D.V. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. - M.: Nauka, 1986.

10. Danko P.S., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. V 2 ch. - M.: Visshaya; shkola, 1998. -ch. 1, 2.
11. Berman G.N. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. –M.-: Nauka, 1985.
12. Minorskiy V.I. Sbornik zadach po visshey matematike. M: Nauka, 1987.
13. Beklemeshev D.V., Petrovich A.Yu., Chuberov I.A. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii i lineynoy algebre. -M.: Nauka, 1987.
14. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Sbornik zadach po visshey matematike, uchebnoe posobie dlya injenerno texnicheskix spetsialnostey vuzov. - M.: Nauka. 1997.
15. Kolde U.K. Praktikum po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. –M. “Visshaya shkola”, 1991.

Internet saytlari

1. www.Ziyonet.uz
2. www.tuit.uz
3. www.Math.uz
4. www.bilim.uz
5. www.gov.uz

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA-MAXSUS TA’LIMI VAZIRLIGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI**

Ro‘yxatga olindi: “TASDIQLAYMAN”
O‘quv ishlari bo‘yicha birinchi
prorektor

№ _____

201__ yil «__» _____ 201__ yil «__» _____

**OLIIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK
STATISTIKA
FANINING
ISHCHI-O‘QUV DASTURI**

Bilim sohasi: 300000-Ishlab chiqarish-texnik soha;

Ta’lim sohasi: 330000-Kompyuter texnologiyalari va informatika;

Ta’lim yo‘nalishi: 5330500 – Kompyuter injiniringi (“Kompyuter
injiniringi”, “AT-servis”, “Multimedia texnologiyalari”);

5330300 – Axborot xavfsizligi;

5330600 – Dasturiy injiniring;

Ta’lim sohasi: 350000-Aloqa va axborotlashtirish, Telekommunikatsiya
texnologiyalari;

Ta’lim yo‘nalishi: 5350100 – Telekommunikatsiya texnologiyalari

(“Telekommunikatsiyalar”, “Teleradioeshittirish”, Mobil tizimlari);

5350200 – Televizion texnologiyalar (“Audioviziual texnologiyalar”, “Telestudiya tizimlari va ilovalari”);

5350300 – Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida iqtisodiyot va menejment;

5350400 – Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida kasb ta’limi;

5350500 – Pochta aloqasi texnologiyasi;

5350600 – Axborotlashtirish va kutubxonashunoslik.

Ishchi o'quv dastur O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 2016 yil 09.01 da tasdiqlangan, texnika oliy o'quv yurtlarida tayyorlanadigan bakalavrlar yo'nalishlari uchun « **OLIIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA** » fanidan tuzilgan fan dasturi asosida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar :

dots. Raxmatov R.R. ,

dots. Adirov T.X.,

dots. Islamova O.A.,

k.o'q. Tadjibaeva Sh.E.

Taqrizchilar:

Kurganov K. A. – O'zbekiston Milliy Universiteti “Algebra va funksional analiz” kafedrasida dotsenti, f.-m.f.n..

Abduvaitov X.A.– TATU “Algoritmash va matematik modellashtirish” kafedrasida dotsenti, f.-m.f.n..

« **OLIIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA** » fanidan tuzilgan ushbu ishchi dastur kafedra yig'ilishida muhokama qilindi va tasdiqlandi (____ ____ 201__ yil, bayonnoma № ____).

Kafedra mudiri _____ R. Raxmatov

Ishchi dastur DIF ilmiy-uslubiy kengashi tomonidan ko'rib chiqildi va tasdiqlandi.
(____ ____ 201__ yil, bayonnoma № ____)

Kengash raisi: Fakultet dekani _____ D.G. Abdullaev

Ishchi dastur Toshkent Axborot Texnologiyalari Universiteti Ilmiy-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqildi va tasdiqlandi. (201__ yil “__” ____dagi “__” – sonli bayonnoma).

O‘quv uslubiy boshqarma boshlig‘i _____ A.Ergashev

Kirish

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fani talabalarga o‘zlashtirishlari zarur bo‘lgan tabiiy-ilmiy, umumkasbiy, harbiy, texnik va matematikaning maxsus bo‘limlarini o‘rgatish va harbiy masalalarga (tayin masalani matematik tilda ifodalash, yechimning optimal usulini tanlash, olingan natijalarni baholash) matematikani qo‘llashda dastlabki ko‘nikmalarini hosil qilish maqsadida o‘qitiladi.

Fanning maqsad va vazifalari

Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursini o‘rgatishdan maqsad – talabalar iqtidorini o‘stirish, mantiqiy va algoritmik fikrlash qobiliyatini shakllantirish; axborotlar bilan bog‘lik jarayonlarni tahlil qilish va matematik modellashtirish uchun zarur bo‘lgan matematik usullarni o‘qitish; axborotlar va texnologiyalarsohasidagi turli yo‘nalishdagi masalalarning asosli va optimal (eng maqbul) yechimlarini topishda matematika fanining o‘rni va ahamiyatini ko‘rsatish.

O‘tilgan mavzularni mustaqil rivojlashtirish, to‘g‘ri yechimlarini topish, turli axborot manbalaridan (adabiyot va internet) foydalanish ko‘nikma va qobiliyatlarini shakllantirish kerak.

Fan bo‘yicha talabaning malakasiga qo‘yiladigan talablar

Fanni o‘rganish natijasida talabalar quyidagi tasavvurlarga ega bo‘lishlari kerak:

- Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining dunyoni bilishdagi, undagi tushuncha va tasavvurlarini umumiyligini tasavur etishdagi alohida xususiyati xaqida;

- matematik modellashtirish xaqida;

- olingan natijalarni qo‘llash mumkin bo‘lgan hollarni baholash va modellarni tekshirish usullari haqida;

Quydagilardan foydalana olishi va bilish kerak:

-matematik tahlilning asosiy tushunchalari va usullarini, analitik geometriyani, chiziqli algebrani va operatsion hisoblashni;

Quyidagi tajribalarga ega bo'lishi kerak:

-inshooatlarni (obektlarni)soni va sifat munosabatlarini ifodalash uchun matematika belgilarini ishlata olish;

- matritsalar ustida amallarni hisoblay olishi, determinantning qiymatini uning ta'rif va xossalriga ko'ra (jumladan Laplas teoremasidan foydalanib) hisoblashlari, matritsa rangi va teskari matritsalarini turli usullar bilan topa olishi;

- chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tadqiq etishi va ularni turli usullar bilan yechimlarini topishi;

- chiziqli va Yevklid fazolarning ta'rifini aniq bilishi, vektorlarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligini, vektorlar sistemasining rangini, fazoning bazisi va o'lchovini, fazo ostilarni bilishi;

- chiziqli va Yevklid fazolarda chiziqli operatorlarning boshlag'ich nazariyasini aniq bilishi;

- to'g'ri chiziq va tekislikning turli tenglamalarini bilishi, ular orasidagi burchaklarni hisoblay olishi, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini bilishi, nuqtadan to'g'ri chiziq va tekislikkacha masofani hisoblay olishi;

- ikkinchi tartibli egri chiziqlarni, ularning tenglamalari bo'yicha tahlil etishi va tasniflashi;

- differensiallashtirish va integrallashtirish formulalarini chalkashtirmasdan to'g'ri ishlata bilishi;

- elementar hisoblashda yaxshi tajribaga ega bo'lishni, qiyinchiliksiz berilgan funksiya uchun Teylor formulasini yozishi;

- integrallarni hisoblashda, qatorni yaqinlashishga tekshirishda zarur usullarni osonlikcha topa bilishi;

- differensial va integral hisobning tatbiqlarini bilishi;

- eng sodda differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini yecha bilish;

- operatsion hisobni bilishi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

O'quv jarayoni bilan bog'liq ta'lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada dars berish, muammoli ma'ruzalar o'qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg'or pedagogik texnologiyalardan va mul'timedia vositalaridan foydalanish, tinglovchilarni undaydigan, o'ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo'yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. Bu ta'lim o'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlanishlarini ko'zda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma'lum bir ta'lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondoshuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam etmog'i lozim: jarayonning mantiqiyliqi, uning barcha bo'g'inlarini o'zaro bog'langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatni aktivlashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o'quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o'z-o'zini faollashtirishi va o'z-o'zini ko'rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta'lim beruvchi va ta'lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e'tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta'lim. Ta'lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta'lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni ob'ektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini,

dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo'llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta'minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo'llash - yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o'quv jarayoniga qo'llash.

O'qitishning usullari va texnikasi. Ma'ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta'lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O'qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o'zaro o'rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O'qitish vositalari: o'qitishning an'anaviy shakllari (darslik, ma'ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o'zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blis-so'rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Semestr davomida test topshiriqlari hamda tayanch so'z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o'tkaziladi.

“ Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika ” fanidan mashg‘ulotlarning mavzular va soatlar bo‘yicha taqsimlanishi:

t/r	Mavzular nomi	Jami soat	Ma’ruza	Amaliy mashg‘ulot	Mustaqil ta’lim
1	Matritsa va determinantlar	20	6	6	8
2	Chiziqli tenglamalar sistemasi	14	4	4	6
3	Vektorlar va ular ustida amallar	20	4	6	10
4	Analitik geometriya elementlari	24	6	4	14
5	Kompleks sonlar	12	4	4	4
6	Bir o‘zgaruvchili funksiyalar. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar.	106	36	34	36
7	Differensial tenglamalar	36	12	10	14
8	Operatsion hisob	20	6	4	10
9	Qatorlar	46	20	12	14
10	Karrali va egri chiziqli integrallar	28	10	6	12
11	Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika	84	36	18	30
	jami	410	144	108	158

Asosiy qism: Fanning uslubiy jixatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo‘yicha talabalarga DTS asosida yetkazilishi zarur bo‘lgan bilim va ko‘nikmalar to‘la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo‘yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatlarimizda bo‘layogan ijtimoiy – siyosiy va demokratik o‘zgarishlar, iqtisodiyotini erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalaridagi islohatlarning ustuvor masalalarni qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so‘nggi yutuqlari e’tiborga olinishi tavsiya etiladi.

Ma’ruza mashg‘ulotlari

Matritsa va determinantlar. Determinantlar va ularning xossalari. Matritsalar va ular ustidagi amallar. Teskari matritsa. Matritsa rangi va uni topish.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritim, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Chiziqli tenglamalar sistemasi: Chiziqli algebraik tenglamalar tizimi. Kramer, Gauss va matritsa usullari yordamida chiziqli algebraik tenglamalar tizimini yechish. Bir jinsli chiziqli tenglamalar tizimlari va ularning fundamental yechimlarini topish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Vektorlar va ular ustida amallar: R^n arifmetik fazo. Vektor va ular ustidagi chiziqli amallar. Vektorni bazislarga yoyish. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari. Ularning xossalari. Vektorlarning kollinearlik, perpendikulyarlik va komplanarlik shartlari. Vektorlarning fizik, mexanik va ba'zi bir harbiy amaliy masalalarga tadbiiq qilinishi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Analitik geometriya elementlari: Qutb koordinata sistemasi va uning dekart koordinata sistemasi bilan bog'lanishi. Uning harbiy topografiyada foydalanishi. Tekislikda to'g'ri chiziqlarning har xil ko'rinishlardagi tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. Ularning paralellik va perpendikulyarlik shartlari. Tekislik. Tekisliklar orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri chiziqlarning har xil ko'rinishlardagi tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Ularning paralellik va perpendikulyarlik shartlari. Aylana, Ellips, giperbola va parabola tenglamalari va ularning xossalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Kompleks sonlar: Kompleks sonlar. Uning algebraik, trigonometrik va ko'rsatkichli ko'rinishlari. Eyler formulasi. Kompleks sonlar ustidagi amallar. Muavr formulasi. Ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q10, Q11, Q12, Q14.

Bir o'zgaruvchili funksiyalar. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar: Ketma-ketliklar limiti va ularning xossalari. Funksiya limiti. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar va ularning xossalari. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar. Funksiyaning uzluksizligi. shartlari. Hosilaning mexanik va geometrik ma'nosi. Yig'indi, ko'paytma, bo'linma, murakab, teskari va ko'rsatkichli funksiya hosilalarini topish. Oshkormas funksiya hosilasi. Logarifmik differensiallash. Parametrik ko'rinishdagi funksiya va uning hosilasi. Funksiya differensial va uning geometrik ma'nosi. Murakkab funksiya differensial. Yuqori tartibli funksiya differensial va hosilasi. Differensial hisobning asosiy teoremlari: Ferma, Roll. Lagranj va Koshi teoremlari. Lopital qoidasi. Funksiya monotonligi, ekstremum qiymatlari va uning grafigining qavariq, botiq intervallari. Burilish nuqtasi. Asimptotalari. Funksiyani to'liq tekshirish. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. O'zgaruvchini almashtirib va bo'laklab integrallash. Kasr-ratsional va ba'zi bir irratsional ifodalarni integrallash. Trigonometrik ifodalarni integrallash. Aniq integral. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral. Nyuton-Leybnis formulasi. O'zgaruvchini almashtirib va bo'laklab integrallash. Aniq integralning geometrik va mexanik masalalarni yechishga tatbiki. 1 va 2-tur xosmas integrallar. Ko'p argumentli funksiyalar limitlarini hisoblash. Xususiy hosila va to'la differensiallarni topish. Yuqori

tartibli xususiy hosila va differensiallar. Murakkab va oshkormas funksiyalarni differensiallash. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q10, Q11, Q12, Q14.

Differensial tenglamalar: Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. O'zgaruvchilari ajraladigan 1 – tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamalar turlari va yechish usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chizikli differensial tenglamalar. Umumiy yechim haqida teorema. Ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli. O'ng tomoni maxsus ko'rinishda bo'lgan o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q4, Q7, Q10, Q11, Q14.

Operatsion hisob: Laplas almashtirishlari. Asl va tasvir. Tasvirlarning xossalari, tasvirlar jadvali. Operatsion hisobning asosiy teoremlari. Tasvirga ko'ra aslni topish usullari. Originallar o'ramasi va uning xossalari. Dyumel integrali. Differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish usullari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q14.

Qatorlar: Sonli qatorlar. Qator yaqinlashishi va yig'indisi. Qatorlar ustida amallar. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari. Ishorali almashinuvchi qatorlar, Leybnis alomati. Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish. Funksional qatorlar. Yaqinlashish va tekis yaqinlashish. Veyrshtas alomati. Tekis yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Darajali qatorlarning xossalari. Teylor qatori. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Fure qatorlari, trigonometrik funksiyalar sistemasi. Yaqinlashuvchi va tekis yaqinlashuvchi funksiyalarini Fure qatoriga yoyish. Furening kosinus va sinus almashtirishlari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q4, Q7, Q10, Q11, Q14.

Karrali va egri chiziqli integrallar: Ikki va uch karrali integrallar ta'rifi. Mavjudlik va o'rta qiymathaqidagi teoremlar. Karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish. Qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemalariga o'tish usuli. Dekart koordinat sistemasida karrali integrallarni hisoblash. 1 va 2 tur egri chiziqli integrallar va ularning asosiy xossalari va ularni hisoblash usullari. Grin formulasi. Egri chiziqli integrallarning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmashlik sharti.

Tasodif va qonuniyat. Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimol. Ehtimolning statistik ta'rifi. Ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosida qurish.

Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. To'la ehtimol va Bayes formulalari.

Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang'ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish. Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To'g'ri to'rtburchakda tekis taqsimlangan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Katta sonlar qonuni. Chebyshev tengsizligi. Chebyshev va Bernulli teoremlari. Lyapunovning markaziy limit teoremasi.

Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma usul. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va distogramma. Taqsimot parametrlarning statistik baholari. Siljimagan, effektiv va asosli baholar. Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlari va eng katta o'xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko'rsatkichli va normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.

Bahoning aniqligi, ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq, oraliq taksimotning matematik kutulmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchlilik oraliqlar.

Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish sohasi. Kritik nuqtalar. Statistik taxminlarni tekshirishda K. Pirson, Kolmogorov – Smirnovparning tasiqlash alomatlar. Puasson taqsimotining parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi haqidani taxminlarni tekshirish. Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalarni aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini aniqlashning yig'indalar va eng kichik kvadratlar usuli

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, meny, algorit, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

**«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha
ma'ruza mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi**

I semestr

T/r	Ma'ruza mavzulari	soat
1.	2 va 3 chi tartibli determinantlar Determinantlar hisoblash usullari.	2

2.	Matritsalar. Asosiy ta'riflar. Matritsalar ustida amallar. Teskari matritsa.	2
3.	Matritsaning rangi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Kroneker-Kapelli teoremasi.	2
4.	Chizikli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Kramer, matritsa va Gauss usullari.	2
5.	Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish, yechimlar to'plamini o'lchash. Fundamental yechimlar sistemasi.	2
6.	Vektorlar. Vektorlar ustidan chiziqli amallar. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar. Bazis.	2
7.	Ikki vektorning skalyar va vektor ko'paytmasi. Uch vektorning aralash ko'paytmasi	2
8.	Tekislikda to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarningn paralellik va perpendikulyarlik shartlari.	2
9.	Fazoda tekislik tenglamalari. Ular orasidagi burchak. Tekisliklarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari.	2
10.	R^3 da to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashishi.	2
11.	Haqiqiy sonlar to'plami. Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida amallar.	2
12.	Muavr, Eyler formulalari.	2
13.	Funksiya va uning berilish usullari. Sonlar ketma ketligi. Uning limiti va xossalari.	2
14.	Funksiyaning limiti va uning xossalari. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar.	2
15.	Birinchi va ikkinchi ajoyib limit.Funksiyaning uzliksizligi. Uzilish nuqtalari va uning turlari.	2
16.	Funksiya hosilasi. Hosilining geometrik va mexanik ma'nosi. Hosilaning xossalari.	2
17.	Hosilalar jadvali. Oshkor, oshkormas va parametrik ko'rinish- dagi funksiyalarni differensialash. Murakkab va teskari funksiyaning hosilasi.	2
18.	Funksiyaning differensial va uning geometrik ma'nosi. Yuqori tartibli hosila va differensial.	2
19.	Funksiyaning hosila yordamida tekshirish.	2

20.	Roll, Lagranj va Koshi teoremlari. Lopital qoidasi	2
21.	Boshlangich funksiya va aniqmas integral. Aniqmas integralning xossalari.	2
22.	Integrallash jadvali. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash.	2
23.	Kasr ratsional ko'rinishdagi funksiyalarni integrallash.	2
24.	Trigonometrik va ba'zi bir irratsional funksiyalarni integrallash.	2
25.	Aniq integral. Aniq integralni hisoblash va uning xossalari.	2
26.	Aniq integralning geometrik va mexanik ma'nosi. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral. Nyuton-Leybnis formulasi.	2
27.	1 va 2- tur xosmas integrallar, ularni hisoblash va yaqinlashishga tekshirish.	2
	JAMI	54

II semestr

T/r	Ma'ruza mavzulari	soat
1.	Ko'p o'zgaruvchili funksiya. Asosiy ta'rif va tushunchalari. Aniqlanish sohasi. Limiti, uzluksizligi.	2
2.	Birinchi tartibli xususiy hosilalari. Xususiy differensial. To'la differensial Yuqori tartibli xususiy hosila va diffe-l. Aralash hosilaning tengligi haqidagi teorema.	2
3.	Murakkab va oshkormas funksiyani diffe-rensiallash. To'la hosila. Ikki o'zgaruvchili funksiyani ekstremumi.	2
4.	Differensial tenglama. Asosiy tushuncha va ta'riflar. Birinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.	2
5.	Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.	2
6.	Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan yuqori tartibli differensial tenglamalar. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini strukturasi haqidagi teorema. Voronskiy determinanti.	2

7.	O'zgaras koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglama.	2
8.	O'zgaras koeffitsientli chiziqli bir jinslimas differensial tenglamalar. O'zgarasni variatsiyalash usuli.	2
9.	O'ng tomoni maxsus ko'rinishda bo'lgan o'zgaras koeffitsientli bir jinslimas chiziqli differensial tenglamalarning xususiy yechimini topish. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi.	2
10.	Laplas almashtirishlari va xossalari. Operatsion hisobning asosiy teoremlari.	2
11.	Asil tasvirini integrallash va differen- siallash haqidagi teoremlar.	2
12.	O'zgaras koeffitsientli diffirensial tenglama va tenglamalar sistemasini yechishining operatsion usuli.	2
13.	Sonli qatorlar, qatorning yaqinlashishi va uzoqlashishi. Geometrik qator. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti. Garmonik qator.	2
14.	Qator yaqinlashishining yetarli alomatlari. Taqqoslash alomati. Dalamber alomati. Koshining radikal alomati. Koshining integral alomati.	2
15.	Ishoralari almashinuvchi qatorlar. Leybnis alomati. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar. Absalyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari.	2
16.	Funksional qatorlar. Yaqinlashish sohasi. Tekis yaqinlashish tushunchasi. Veyershtas alomati, tekis yaqinlashuvchi qatorning xossalari.	2
17.	Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi va intervali. Absolyut yaqinlashuvchi darajali qatorlarning xossalari.	2
18.	Taylor va Makloren qatorlari. Ularning qo'llanishi.	2
19.	Funksiyalarning ortogonal va ortonormal sistemalari. Funksiyani ortonormal sistemalar buyicha Fure qatoriga yoyish. Dirixle sharti.	2
20.	Davriy funksiya uchun Fure qatori. Juft va toq funksiyalar uchun Fure qatori. Yarim davrda berilgan ixtiyoriy davriy funksiyalarning Fure qatori.	2
21.	Fure qatorining kompleks shakli. Parseval tengligi. Fure integrali. Toq va juft funksiyalar uchun Fure integrali. Furening kosinus va sinus almashtirishlari	2
22.	Ikki karrali integral tushinchasiga olib keladigan masalalar. Ta'rifi va xossalari. Ikki karrali integralning mavjudligi haqidagi teorema.	2

23.	Dekart koordinatalar sistemasida ikki karrali integralni hisoblash. Ikki karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish. Qutb koordinata sistemasida ikki karrali integral.	2
24.	Uch karrali integral ta'rifi, mavjudlik teoremasi. Uch karrali integralning xossalari.	2
25.	Dekart koordinat sistemasida uch karali Integral. Uch karrali integrallarda o'zgaruvchini almashtirish. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida uch karrali integral.	2
26.	1- tur egri chiziqli integral va ularni hisob-lash. Xossalari.	2
27.	2- tur egri chiziqli integral va ularni hisob-lash. Xossalari Grin formulasi. 2 tur egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti.	2
JAMI		54

IV semestr

№	Ma'ruza mavzulari	Ajr. soat
1	Tasodif va qonuniyat. Tasodifiy hodisa va ular ustida amallar. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar algebrasi.	2
2	Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimol. Ehtimolning statistik ta'rifi. Ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosida qurish.	2
3	Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. To'la ehtimol va Bayes formulalari.	2
4	Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.	2
5	Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari.	4
6	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang'ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.	2

7	Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.	2
8	Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To'g'ri to'rtburchakda tekis taqsimlangan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti.	2
9	Katta sonlar qonuni. Chebyshev tengsizligi. Chebyshev va Bernulli teoremlari. Lyapunovning markaziy limit teoremasi.	2
10	Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma usul. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va distogramma. Taqsimot parametrlarning statistik baholari. Siljimagan, effektiv va asosli baholar.	4
11	Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlari va eng katta o'xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko'rsatkichli va normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.	2
12	Bahoning aniqligi, ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq, oraliq taksimotning matematik kutulmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchlilik oraliqlar.	2
13	Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish sohasi. Kritik nuqtalar.	2
14	Statistik taxlinlarni tekshirishda K. Pirson, Kolmogorov – Smirnovparning tasiqlash alomatlari. Puasson taqsimotining parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi haqidani taxminlarni tekshirish.	2
15	Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalarni aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini aniqlashning yig'indalar va eng kichik kvadratlar usuli.	4
Jami		36

Amaliy mashg'ulotlarning tavsiya etiladigan mavzulari

Matritsa va determinantlar. 2-chi, 3-chi, n -chi tartibli determinantlar. Ularni hisoblash usullari. Matritsalar, ular ustida amallar. Teskari matritsa. Matritsa rangi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Chiziqli tenglamalar sistemasi: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Kramer, matritsa va Gauss usullari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Vektorlar va ular ustida amallar: Vektorlar, ular ustida amallar. Vektorlarning skalyar, vektor, aralash ko'paytmalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Analitik geometriya elementlari: Dekart va qutb koordinatalar. Ular orasidagi bog'lanish. Tekislikda to'g'ri chiziqlar. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklar. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro joylashuvi. Tekisliklar, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak va masofalar. R^2 dagi egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13

Kompleks sonlar: Kompleks sonlar, ular ustida amallar. Muavr, Eyler formulalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A3, Q10, Q11, Q12, Q14.

Bir o'zgaruvchili funksiyalar. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar: Asosiy elementar funksiyalar. Sonli ketma – ketliklar limitlarini hisoblash. Funksiya limitini hisoblash. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish. Funksiyaning uzlish nuqtalari va ularning turlarini aniqlash. Funksiya hosilasi. Murakkab, oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarning hosilasi. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Funksiyalarni hosila yordamida tekshirish. Lopital qoidasi. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Integralda o'zgaruvchilarni almashtirish. Bo'laklab integrallash. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik va irratsional ifodalarni integrallash. Aniq integrallarni hisoblash, Nyuton – Leybnis formulasi. Aniq integralni hisoblashda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash. Aniq integralning geometrik va mexanik masalalarni yechishga tatbiqi. 1 va 2-tur xosmas integrallar. Ko'p argumentli funksiyalar limitlarini hisoblash. Xususiy hosila va to'la differensiallarni topish. Yuqori tartibli xususiy hosila va differensiallar.

Murakkab va oshkormas funksiyalarni differensiallash. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Differensial tenglamalar: O'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamalarining asosiy turlari va ularni yechish

usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar. Umumiy yechim. O'zgaras koeffitsientli 2- tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi va ularni yechish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q7, Q10, Q12, Q14.

Operatsion hisob: Tasvir va asl, ularni aniqlash. Asllar o'ramasi. Operatsion hisob yordamida differensial tenglamalarni yechish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, Q10, Q14

Qatorlar: Sonli qatorlar. Musbat hadli qatorlar. Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish. Ishorasi almashinuvchi qatorlar. Funksional qatorlar. Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi. Teylor qatori. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Funksiyalarni trigonometrik qatorlarga yoyish. Furening sinus va kosinus almashtirishlari. Kompleks ko'rinishdagi Fure qatori.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Karrali va egri chiziqli integrallar: Ikki va uch karrali integrallar va ularni hisoblash. O'zgaruvchilarni almashtirish. Karrali integrallarni qutb, silindrik va sferik koordinata sistemalarida hisoblash.

1- va 2- tur egri chiziqli integrallarni hisoblash. Egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmashlik sharti. Grin formulasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, . Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar

Ehtimolning klassik ta'rifiga doir masalalar yechish. Geometrik ehtimol. Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. To'la ehtimol va Bayes formulalari. Bernulli formulasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

Tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot qonunlari.

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini hisoblash. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

Tanlanma usul.

Emperik taqsimot funksiyasi va uni grafigini yasash. Poligon va gistrogramma. Taqsimot parametrlarni statistik baholarini hisoblash. Statistik taxminlarni tekshirish. Korrelyatsion va regrission taxlil

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha amaliy mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi

I semestr

T/r	Amaliy mashg'ulotlar mavzulari	soat
1.	Determinantlar va ularning xossalari. Determinantlarni hisoblash.	2
2.	Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsani hisoblash.	2
3.	Chizikli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish.	2
4.	Matritsaning rangi topishga va Gauss usuliga doir misollar yechish.	2
5.	Chizikli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish.	2
6.	Vektorlar va usullar ustida amallar Ikki vektorning skalyar kupaytmasi xossalari va hisoblash.	2
7.	Ikki vektorning vektor ko'paytmasi va uch vektorlarning aralash ko'paytmasi.	2
8.	Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalariga doir misollar yechish.	2
9.	Fazoda tekislik tenglamalariga doir misollar yechish.	2
10.	Fazoda to'g'ri chiziq. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziqning o'zaro joylashuviga doir misollar yechish.	2
11.	Kompleks sonlar va ular ustida amallar.	2
12.	Muavr va Eyler formulalariga doir misollar yechish.	2
13.	Asosiy elementar funksiyalar va ularning grafiklarini yasash.	2
14.	Limitni hisoblash. $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochish.	2

15.	1 va 2- ajoyib limitlarga doir misollar yechish. Funksiyaning uzluksizligi.	2
16.	Funksiyaning hosilasini topishga doir misollar yechish. Logarifmlarni differensiallash.	2
17.	Murakkab funksiyalarning hosilasiga Oshkormas va parametrik funksiyaning hosilasi.	2
18.	Yuqori tartibli hosila va differensial. Lopital qoidasi.	2
19.	Funksiyaning monotonligi, ekstremumni topish. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymati.	2
20.	Asimptotalar, funksiya grafigining botiqligi, qavariqligi. Buriish nuqtasi. Funksiyani to'la tekshirish, grafigi.	2
21.	Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash.	2
22.	Kasr ratsional funksiyaning integrallash.	2
23.	Trigonometrik funksiyalarni integrallash.	2
24.	Irratsional ifodalarni integrallash.	2
25.	Aniq integralni hisoblash. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.	2
26.	Aniq integral yordamida yassi figuralaryuzlarini hisoblash. Aniq integral yordamida jismlar hajmini va egri chiziq yoy uzunligini hisoblash	2
27.	Birinchi va ikkinchi tur xosmas integrallarga doir misollar yechish.	2
Jami		54

II semestr

T/r	Amaliy mashg'ulotlar mavzulari	soat
1	Ikki argumentli funksiya aniqlanish sohasi va grafigiga doir misollar. Limiti, uzluksizligi. Birinchi tartibli xususiy hosilalar.	2
2	Ikki argumentli funksiya ekstremum-larini topishga doir misollar. Shartli ekstremumlarni topish. Ikki argumentli funksiyaning to'la differensial va uning takribiy hisoblashlarga tatbiqi.	2
3	Birinchi tartibli differensial tenglamalar. O'zgaruvchisi ajraladigan va bir jinsli differensial tenglamaga doir misollar yechish.	2

4	Chizikli differensial tenglama. Bernulli tenglamasiga doir misollar yechish.	2
5	Yukori tartibli differensial tenglama. Tartibini pasaytirish yordamida yechiladigan differensial tenglamalar.	2
6	Yuqori tartibli o'zgaras koeffitsientli chizikli bir jinsli tenglamalarga doir misollar yechish.	2
7	O'ng tomoni maxsus kurinishdagi bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarni yechishga doir misollar yechish.	2
8	Operatsion hisob. Tasvirdan aslga-asldan tasvirga o'tishga doir misollar yechish.	2
9	Operatsion hisob yordamida o'zgaras koeffitsientli chizikli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob usuli bilan yechish..	2
10	Musbat hadli sonli qatorlar. Taqqoslash alomatiga doir misollar yechish. Dalamber va Koshining radikal alomatlariga doir misollar yechish.	2
11	Koshining integral alomatlariga doir misollar yechish. Ishorasi almashuvchi sonli katorlar. Absolyut va shartli yaqinlashishni aniqlashga doir misollar yechish.	2
12	Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi va sohasini topishga doir misollar yechish.	2
13	Taylor va Makloren qatorlarining tadbiqiga doir misollar yechish.	2
14	Davriy funksiyalarni Fure qatoriga yoyish. Juft va toq funksiyalarni Fure qatoriga yoyishga doir misollar yechish.	2
15	Ixtiyoriy davrli funksiyalarni Fure qatoriga yoyishga doir misollar yechish. Furening sinus va kosinus almashtirishlari.	2
16	Ikki karrali integrallarni Dekart va qutb koordinatlara sistemasida yechish. Ikki karrali integral yordamida yuza va hajmni hisoblashga doir misollar yechish.	2
17	Uch karrali integralni hisoblashga doir misollar yechish. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida 3 karrali integral. 3 karrali integralni geometrik masalalariga tatbiqi.	2
18	1 va 2 - tur egri chiziqli integralni hisoblashga doir misollar yechish. Grin formulasi. 2-tur egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligiga doir misollar yechish.	2
Jami		36

IV semestr

№	Amaliy darslar mavzusi	Ajr. soat
1	Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar. Ehtimolning klassik ta'rifiga doir masalalar yechish.	1
2	Geometrik ehtimol. Ehtimolning xossalardan foydalanib murakkab hodisalarning ehtimolini hisoblash.	1
3	Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. To'la ehtimol va Bayes formulalari.	1
4	Bog'liqsiz tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplas, Puasson formulalari.	1
5	Tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot qonunlari. Taqsimot funksiya, zichlik funksiya va uning xossalari.	2
6	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini hisoblash. Matematik kutilish, dispersiya va boshqa boshlang'ich va markaziy momentlar.	2
7	Binomial, Puasson, gipergeometrik, tekis, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan miqdorlarga doir masalalar.	1
8	Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari.	1
9	Talanma usul. Emperik taqsimot funksiyasi va uni grafigini yasash. Poligon va gistogramma.	2
10	Taqsimot parametrlarni statistik baholarini hisoblash.	1
11	Ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq. Matematik kutilish, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchli oraliqlar tuzish.	1
12	Statistik taxminlarni tekshirish. Puasson taqsimoti parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi haqidagi taxminni tekshirish	2
13	Korrelyatsion va regrission taxlil. Chiziqli korrelyatsiya koeffitsientlarini aniqlash. Eng kichik kvadratlar usuli yordamida chiziqli regressiya tenglamalarini tuzish.	2
	Jami	18

Mustaqil ta'lim tashkil etishning shakli va mazmuni.

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” bo'yicha talabanning mustaqil ta'limi shu fanni o'rganish jarayonining tarkibiy qismi bo'lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to'la ta'minlangan.

Talabalar auditoriya mashg'ulotlarida professor-o'qituvchilarning ma'ruzasini tinglaydilar, misol va masalalar yechadilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uy vazifa sifatida berilgan misol va masalalarni yechadi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o'rganish maqsadida qo'shimcha adabiyotlarni o'qib referatlar tayyorlaydi hamda mavzu bo'yicha testlar yechadi. Mustaqil ta'lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Uyga vazifalarni bajarish, qo'shimcha darslik va adabiyotlardan yangi bilimlarni mustaqil o'rganish, kerakli ma'lumotlarni izlash va ularni topish yo'llarini aniqlash, internet tarmoqlaridan foydalanib ma'lumotlar to'plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to'garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib ilmiy maqola va ma'ruzalar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta'limsiz o'quv faoliyati samarali bo'lishi mumkin emas.

Uy vazifalarini tekshirish va baholash amaliy mashg'ulot olib boruvchi o'qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o'zlashtirish darajasini tekshirish va baholash esa ma'ruza darslarini olib boruvchi o'qituvchi tomonidan har darsda amalga oshiriladi.

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

I SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va qisqacha mazmuni	Berilgan topshiriqlar	Ajr. soat
1.	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
2.	2 – tartibli egri chiziqlar va sirtlar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	16
3.	Vektorlarni matritsa ko'rinishda ifodalash. Chiziqli	Adabiyotlardan	10

	almashtirish va bunda vektor xossalari va amallarining saqlanishini tekshirish. Uning geometrik ma'nosini ifodalash.	konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	
4.	Funksiyalarni tekshirish. Murakkab funksiyalar grafigini chizish usullari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	10
5.	Aniq integrallar yordamida yechiladigan masalalar hakida ma'lumotlar va ularni yechish hamda tahlil qilish.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	16
	JAMI		66

II SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va qisqacha mazmuni	Berilgan topshiriqlar	Ajr. soat
1.	Ikki argumentli funksiya ekstremumini topish. Ekstremum mavjudlik sharti va turlari. Lokal va global ekstremumlar. Ko'p argumentli funksiyalar va ularning hosilalari orqali ifodalangan fizik masalalar sharhi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
2.	Laplas va Fure almashtirishlari, ular orasidagi bog'lanish. Ba'zi haqiqiy (transsendent) sonlarni sonli qatorlar orqali ifodalash va hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
3.	Teylor qatori yordamida taqribiy hisoblashlar. Fure qatorlari va garmonik tahlil.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
4.	2 va 3 karrali integrallar yordamida ba'zi geometrik figuralar yuzalari va hajmlarini hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14

5.	Qatorlarning differensial tenglamalarni yechishga tatbiqi. Qatorlar yordamida ba'zi integralarni hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	10
	JAMI		62

IV SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va uning qisqacha mazmuni	Ajr. soat
1	Ma'lumotlarni taxlil qilish	7
2	Ma'lumotlar asosida taksimotning noma'lum parametrlarini baxolash	8
3	Statistik gipotezalarni tekshirish	7
4	Regressiya tenglamalarini tuzishning turli usullarini (tortilgan ip, yig'indilar usuli, eng kichik kvadratlar) taqqoslash tahlili.	8
	Jami	30

Dasturning informatsion uslubiy ta'minoti

Mazkur fanni o'qitish jarayonida ta'limning zamonaviy metodlari, pedagogik va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini qo'llash nazarda tutilgan:

- chiziqli algebra nazariyasi asoslari, matritsalar va chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga bag'ishlangan mavzular zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsiya va elektron-didaktik texnologiyalaridan foydalanilgan holda o'tkaziladi;

- chiziqli fazoda chiziqli operatorlar va ular ustida amallar hamda analitik geometriya masalalarini yechishga bag'ishlangan amaliy mashg'ulotlarda aqliy xujum, guruhli fikrlash, "ish o'yini" va boshqa pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi;

- bir va ko'p o'zgaruvchi funksiyalar, ularning differensial va integral hisoblariga bag'ishlangan amaliy mashg'ulotlarida kichik guruhlar musobaqalari, guruhli fikrlash pedagogik texnologiyalarini qo'llash nazarda tutiladi.

“ Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika ” fanidan talabalar bilimni reyting tizimi asosida baholash mezonlari.

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fani bo'yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma'lumotlar fan bo'yicha birinchi mashg'ulotda talabalarga e'lon qilinadi.

Fan bo'yicha talabalarining bilim saviyasi va o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligini ta'minlash uchun quyidagi nazorat turlari o'tkaziladi:

joriy nazorat (JN) – talabani fan mavzulari bo'yicha bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg'ulotlarda og'zaki so'rov, test o'tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollektivum, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o'tkazilishi mumkin;

oraliq nazorat (ON) – semestr davomida o'quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o'z ichiga olgan) bo'limi tugallangandan keyin talabani nazariy bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o'tkaziladi va shakli (yozma, og'zaki, test va hokazo) o'quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;

yakuniy nazorat (YaN) – semestr yakunida muayyan fan bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan yozma ish yoki test shaklida o'tkaziladi.

ON o'tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **ON** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **ON** qayta o'tkaziladi.

Oliy ta'lim muassasasi rahbarining buyrug'i bilan ichki nazorat va monitoring bo'limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida **YaN** ni o'tkazish jarayoni muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **YaN** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **YaN** qayta o'tkaziladi.

Talabani bilim saviyasi, ko'nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabani fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha talabalarining semestr davomidagi o'zlashtirish ko'rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi.

Ushbu 100 ball baholash turlari bo'yicha quyidagicha taqsimlanadi:

YaN-30 ball, qolgan 70 ball esa JN-30 ball va ON-40ball qilib taqsimlanadi.

Ball	Baho	Talabalarining bilim darajasi
86-100	A'lo	Xulosa va qaror qabul qilish. Ijodiy fikrlay olish. Mustaqil mushohada yurita olish. Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
71-85	Yaxshi	Mustaqil mushohada qilish. Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
55-70	Qoniqarli	Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
0-54	Qoniqarsiz	Aniq tasavvurga ega bo'lmaslik. Bilmaslik.

Fan bo'yicha saralash bali 55 ballni tashkil etadi. Talabani saralash balidan past bo'lgan o'zlashtirishi reyting daftarchasida qayd etilmaydi.

Talabalarining o'quv fani bo'yicha mustaqil ishi joriy, oraliq va yakuniy nazoratlar jarayonida tegishli topshiriqlarni bajarishi va unga ajratilgan ballardan kelib chiqqan holda baholanadi.

Fan bo'yicha joriy va oraliq nazoratlarga ajratilgan umumiy ballning 55 foizi saralash ball hisoblanib, ushbu foizdan kam ball to'plagan talaba yakuniy nazoratga kiritilmaydi.

Joriy **JN** va oraliq **ON** turlari bo'yicha 55 bal va undan yuqori balni to'plagan talaba fanni o'zlashtirgan deb hisoblanadi va ushbu fan bo'yicha yakuniy nazoratga kirmasligiga yo'l qo'yiladi.

Talabaning semestr davomida fan bo'yicha to'plagan umumiy bali har bir nazorat turidan belgilangan qoidalarga muvofiq to'plagan ballari yig'indisiga teng.

ON va **YaN** turlari kalendar tematik rejaga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan reyting nazorat jadvallari asosida o'tkaziladi. **YaN** semestrning oxirgi 2 haftasi mobaynida o'tkaziladi.

JN va **ON** nazoratlarda saralash balidan kam ball to'plagan va uzrli sabablarga ko'ra nazoratlarda qatnasha olmagan talabaga qayta topshirish uchun, navbatdagi shu nazorat turigacha, so'nggi joriy va oraliq nazoratlar uchun esa yakuniy nazoratgacha bo'lgan muddat beriladi.

Talabaning semestrda **JN** va **ON** turlari bo'yicha to'plagan ballari ushbu nazorat turlari umumiy balining 55 foizidan kam bo'lsa yoki semestr davomida joriy, oraliq va yakuniy nazorat turlari bo'yicha to'plagan ballari yig'indisi 55 balidan kam bo'lsa, u akademik qarzdor deb hisoblanadi.

Talaba nazorat natijalaridan norozi bo'lsa, fan bo'yicha nazorat turi natijalari e'lon qilingan vaqtdan boshlab bir kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat etishi mumkin. Bunday holda fakultet dekanining taqdimnomasiga ko'ra rektor buyrug'i bilan 3 (uch) a'zodan kam bo'lmagan tarkibda apellyatsiya komissiyasi tashkil etiladi.

Apellyatsiya komissiyasi talabalarining arizalarini ko'rib chiqib, shu kunning o'zida xulosasini bildiradi.

Baholashning o'rnatilgan talablar asosida belgilangan muddatlarda o'tkazilishi hamda rasmiylashtirilishi fakultet dekani, kafedra mudiri, o'quv-uslubiy boshqarma hamda ichki nazorat va monitoring bo'limi tomonidan nazorat qilinadi.

REYTING BALLARINING TAQSIMOTI

(O'zOO'MTV 2010 yil 29 avgustdagi 333-sonli buyrug'i asosida)

Fan uchun ajratilgan umumiy reyting ballari taqsimoti

Nazorat turi	JB-1	OB-1	JB-2	OB-2	YaN	Jami
Fanga ajratilgan soatlarga nisbatan foiz hisobida	15	20	15	20	30	100

Fan uchun mashg'ulot turlariga ajratilgan reyting ballari taqsimoti

Nazorat turi		JB1-JB2	Nazorat turi	OB1,OB2	YaN
1.	Amaliy mashgʻulotlarda bilimini sinash	5 bal	1. Nazariy qismdan ekspress soʻrov	3 bal	Yakuniy yozma ish uchun
2.	Uy vazifasini bajarganligi uchun	5 bal	2. Kollokviumlar oʻtkazish yoʻli bilan baholash	6 bal	
3.	Nazorat ishlari uchun	5 bal	3. Yozma ish yoki test topshiriqlari uchun	6 bal	
			4. Mustaqil ish	5 bal	
Jami		15+15bal	Jami	20+20	30

Yakuniy nazoratda yozma ish va test savollarini baholash mezonlari

Yakuniy nazorat yozma ish yoki test shaklida amalga oshirilganda, sinov ko'p variantli usulda o'tkaziladi. Har bir yozma ish varianti 2 ta nazariy savol va 3 ta amaliy topshiriqdan iborat, test topshiriqlaridagi savollar soni 10 ta va undan ko'p bo'lishi ham mumkin. Nazariy savollar fan bo'yicha tayanch so'z va iboralar asosida tuzilgan bo'lib, fanning barcha mavzularini o'z ichiga qamrab oladi.

Har bir nazariy savolga yozilgan javoblar bo'yicha o'zlashtirish ko'rsatkichi 0-6 ball oralig'ida baholanadi. Amaliy topshiriqlar ham 0-6 ball oralig'ida baholanadi. Test topshiriqlari soniga qarab har bir to'g'ri javob uchun alohida ball beriladi. Bunda talaba maksimal 30 ball to'plashi mumkin.

Yozma ish va test sinovi bo'yicha umumiy o'zlashtirish ko'rsatkichini aniqlash uchun variantda berilgan savollarning har biri uchun yozilgan javoblarga qo'yilgan o'zlashtirish ballari qo'shiladi va yig'indi talabaning yakuniy nazorat bo'yicha o'zlashtirish bali hisoblanadi.

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalari

ro'yxati

8. Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
9. Jo'raev T., Sa'dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.1., Toshkent, "O'qituvchi", 1995.
10. Jo'raev T., Sa'dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.2., Toshkent, "O'zbekiston", 1999.
11. Soatov Yo.U Oliy matematika. T., O'qituvchi, 1995. 1- 5 qismlar.
12. N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010.
13. Latipov X.R., Tadjiev Sh. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, "O'zbekiston". 1995.
14. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Qo'shimcha adabiyotlar:

16. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz, - Toshkent.: O'qituvchi, 1-qism, 1989.
17. Latipov X.R., Nosirov F.U., Tadjiev Sh.A. Analitik geometriya va chiziqli algebradan masalalar yechish bo'yicha qo'llanma. Toshkent, Fan, 1999.
18. A.Yusupov, X.A.Axmedova, A.Tilavov. «Ko'p argumentli funksiyalarning integrallari. Maydonlar nazariyasi». Toshkent, 2011.
19. Piskunov N.S. Differentsialnoe i integralnoe ischislenie dlya VTUZov. -M.: Nauka, v 2x chastyax, 2001.
20. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo'llanma. Toshkent, O'qituvchi, 2001.
21. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi kursi. T. O'qituvchi, 1980.
22. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Differentsialnye uravneniya. Kratnye integraly. Radly. Funktsii kompleksnogo peremennogo. - Nauka, 1997.
23. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Elementi lineynoy algebri i analiticheskoy geometrii. - M.: Nauka, 1988.
24. Kletenik D.V. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. - M.: Nauka, 1986.
25. Danko P.S., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. V 2 ch. - M.: Visshaya; shkola, 1998. -ch. 1, 2.
26. `Berman G.N. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. -M.-: Nauka, 1985.
27. Minorskiy V.I. Sbornik zadach po visshey matematike. M: Nauka, 1987.
28. Beklemeshev D.V., Petrovich A.Yu., Chuberov I.A. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii i lineynoy algebre. -M.: Nauka, 1987.
29. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Sbornik zadach po visshey matematike, uchebnoe posobie dlya injenerno texnicheskix spetsialnostey vuzov. - M.: Nauka. 1997.

30. Kolde U.K. Praktikum po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. –M. “Visshaya shkola”, 1991.

Internet saytlari

6. www.Ziyonet.uz
7. www.tuit.uz
8. www.Math.uz
9. www.bilim.uz
10. www.gov.uz

OLIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

fanining

IV-SEMESTR UCHUN

Nazariy mashg'ulotlar materiallari

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

Toshkent 2016

1-MA'RUZA TASODIF VA QONUNIYAT. TASODIFIY HODISALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR. ELEMENTAR HODISALAR FAZOSI. HODISALAR ALGEBRASI

REJA:

- 1.1 Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar
- 1.2 Hodisalar algebrasi

KALIT SO'ZLAR:

Elementar hodisa. Elementar hodisalar fazosi. Tasodifiy hodisa. Kesishma. Birlashma. Ayirma. Teskari hodisa. Hodisalar algebrasi.

1.1 Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar

Tabiatni, texnik jarayonlarni, umuman kundalik hayotni kuzatishda turli hodisalarga duch kelamiz. Masalan, havo o'zgarib yomg'ir yoki qor yog'ishi, otilgan o'qning nishonga tegishi yoki tegmasligi, tanga tashlaganda uning gerbli tomoni bilan yoki raqamli tomoni bilan tushishi hodisalarga misol bo'ladi.

Umuman aytganda, hodisa deganda kuzatish yoki tajriba natijasida yuzaga keladigan fakt tushuniladi.

Odatda hodisalar ma'lum shartlar bajarilganda yoki tajriba (sinov) natijasida sodir bo'ladi (ya'ni ro'y beradi). Hodisalar bosh harflar bilan belgilanadi.

Aytaylik, tanga tashlash tajribasi o'tkazilsin. Bunda

- 1) tanganing biror tomonini tushishi hodisasi,
- 2) bir vaqtda tanganing ikkala tomonini tushishi hodisasi,
- 3) tanganing gerbli yoki raqamli tomonini tushishi hodisasi haqida aytish mumkin

Birinchi holda hodisa har doim sodir bo'ladi.

Odatda bunday hodisa muqarrar hodisa deyiladi va U harfi bilan belgilanadi.

Ikkinchi holda hodisa mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi va V harf bilan belgilanadi.

Uchinchi holda hodisa sodir bo'lishi ham mumkin sodir bo'lmasligi ham mumkin. Bunda hodisa tasodifiy hodisa bo'ladi.

Demak, tajriba natijasida sodir bo'lishi ham, sodir bo'lmasligi ham mumkin bo'lgan hodisa tasodifiy hodisa deyiladi.

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy hodisalar ehtimollari va ularning qonuniyatlari o'rganiladi.

Keyinchalik tasodifiy hodisa deyish o'rniga hodisa deb ketaveramiz.

Tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisa elementar hodisa deyiladi. Barcha elementar hodisalardan iborat to'plam elementar hodisalar fazosi deyilib, u Ω kabi belgilanadi.

Masalan, tajriba tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajriba natijalari quyidagicha bo'ladi:

$\tilde{A}\tilde{A}$ – ikki martada ham tanganing gerb tomoni tushishi hodisasi;

$\tilde{A}D$ –birinchi martada gerbli, ikkinchi martada raqamli tomonini tushishi hodisasi;

$D\tilde{A}$ –birinchi martada raqamli, ikkinchi martada gerbli tomonini tushishi hodisasi;

DD – ikkala martada ham tanganing raqamli tomonini tushishi hodisasi.

Demak, bu tajribada 4 ta elementar hodisalar $\tilde{A}\tilde{A}$, $\tilde{A}D$, $D\tilde{A}$, DD sodir bo'lib, elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}D, D\tilde{A}, DD\}$ bo'ladi.

Aytaylik, biror tajriba natijasida A va B hodisalar sodir bo'lishi mumkin bo'lsin.

1-ta'rif. Agar A hodisa sodir bo'lganda xar doim B hodisa ham sodir bo'lsa, A hodisa B hodisani *ergashtiradi*¹ deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Bu holda hodisaning sodir bo'lishi B hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diradi deb ham yuritiladi

Masalan, tajriba tomonlariga mos ravishda 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlar yozilgan kubikni tashlashdan iborat bo'lib, A -ikki raqamli tomonini tushishi hodisasi, B esa juft raqamli tomonini tushishi hodisasi bo'lsa, unda $A \subset B$ bo'ladi.

Agar A va B hodisalari uchun

$$A \subset B, \quad B \subset A$$

bo'lsa, A va B teng kuchli hodisalar deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

2-ta'rif. A va B hodisalarning hech bo'lmaganda bittasining sodir bo'lishi natijasida sodir bo'ladigan hodisa A va B hodisalar *yig'indisi*² deyiladi va $A + B$ kabi yoziladi.

Masalan, tajriba ikki merganning nishonga qarab bir martadan o'q uzishidan iborat bo'lib, A birinchi merganning o'qining nishonga tegishi hodisasi, B esa ikkinchi merganning o'qini nishonga tegishi hodisasi bo'lsin. Bu hodisalar yig'indisi $A + B$ hodisasi

¹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

² Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

merganlarning hech bo'lmaganda bittasining o'qini nishonga tegishli ifodalovchi hodisa bo'ladi.

Yuqoridagidek, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning yig'indisi ta'riflanadi.

Keltirilgan ta'rifdan

$$A + B = B + A, \quad A + A = A$$

bo'lishi kelib chiqadi.

3-ta'rif. A va B hodisalarning sodir bo'lishi natijasida sodir bo'ladigan hodisa, A va B hodisalar ko'paytmasi deyiladi va $A \cdot B$ kabi yoziladi.

Bu ta'rifdan bevosita

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad A \cdot A = A$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqoridagidek, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning ko'paytmasi ta'riflanadi.

4-ta'rif. Agar A hodisasining sodir bo'lishi B hodisasining ham sodir bo'lishini inkor etmasa, A va B *birgalikda bo'lgan hodisalar* deyiladi³.

Masalan, kubikni tashlash tajribasida 4 raqamli tomonini tushishi hodisasini A , juft raqamli tomonini tushishi hodisani B deyilsa, ular birgalikda bo'lgan hodisalar bo'ladi.

5-ta'rif. Agar A hodisasining sodir bo'lishi, B hodisasining sodir bo'lishini inkor etsa, A va B *birgalikda bo'lmagan hodisalar*⁴ deyiladi.

Masalan, tangani tashlash tajribasida gerbli tomonini tushishi hodisasi A , raqamli tomonini tushishi hodisasi B deyilsa, ular birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'ladi.

Agar tajriba natijasida sodir bo'lishi mumkin bo'lgan

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

hodisalarning birining sodir bo'lishi boshqasining sodir bo'lishiga nisbatan imkoniyatliroq bo'lmasa, $A_1, A_2, \dots, A_n$ *teng imkoniyatli xodisalar* deyiladi.

Agar A va B hodisalar uchun

$$A + B = U, \quad A \cdot B = V$$

³ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

⁴ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

bo'lsa, A va B o'zaro qarama-qarshi hodisalar⁵ deyiladi. A hodisaga qarama-qarshi hodisa $\overline{A}$ kabi belgilanadi.

1.2 Hodisalar algebrasi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lmish hodisa deb sinov (tajriba) o'tkazish natijasida, ya'ni ma'lum shartlar majmui amalga oshishi natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan har qanday faktga aytiladi. Tajribaning natijasi bir qiymatli aniqlanmagan hollarda hodisa tasodifiy hodisa deb ataladi, tajriba esa tasodifiy tajriba deb ataladi. Tasodifiy tajribalar haqida so'z yuritganimizda biz faqat yetarlicha ko'p marta takrorlash mumkin bo'lgan (hech bo'lmaganda nazariy jihatdan) tajribalarni ko'zda tutamiz.

Tasodifiy tajribaning matematik modelini qurish quyidagi etaplarni o'z ichiga oladi:

- 1) Elementar hodisalar to'plami Ω - ni tuzish.
- 2) Berilgan tajriba uchun etarli bo'lgan hodisalar sinfi $\mathfrak{I}$ ni ajratish.
- 3) Shu hodisalar sinfi ustida ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi sonli funksiya P -hodisaning ehtimolini berish.

Hosil bo'lgan $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ -uchlikni ehtimollar fazosi deb ataymiz.

Ω -elementar hodisalar to'plami deb berilgan tasodifiy tajribada ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha bir-birini rad etuvchi hodisalar to'plamiga aytiladi. Ω -ning elementlarini $\omega_i, i=1,2,\dots,n$ bilan belgilanadi. n -esa Ω -to'plam elementlarining soni. Murakkab hodisa, yoki oddiygina hodisa deb Ω - elementar hodisalar to'plamining ixtiyoriy to'plam ostiga aytiladi.

Misol:

Tajriba o'yin soqqasini tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajribada $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$, bunda ω_i - soqqa bir marta tashlanganda i -raqamining tushishi hodisasidir. Bu hodisa - elementar hodisadir, va, Ω -elementar hodisalar to'plamidir.

Quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A -tushgan raqamning juft bo'lishi. $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

B -tushgan raqamning uchga bo'linishi. $B = \{\omega_3, \omega_6\}$

C -tushgan raqam 2 dan katta emas $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

K -tushgan raqamning toq bo'lishi. $K = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$,

Ikki yoki undan ortiq hodisalarning birlashmasi deb, barcha hodisalarning kamida biriga tegishli elementar hodisalar to'plamiga aytiladi.

⁵ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Misol:

$M = A + B$ - tushgan raqam juft yoki uchga bo'linadi. $M = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$

Ikki yoki undan ortik hodisalarning **ko'paytmasi deb**, barcha hodisalarga bir vaqtda tegishli bo'lgan elementar hodisalar to'plamiga aytiladi⁶.

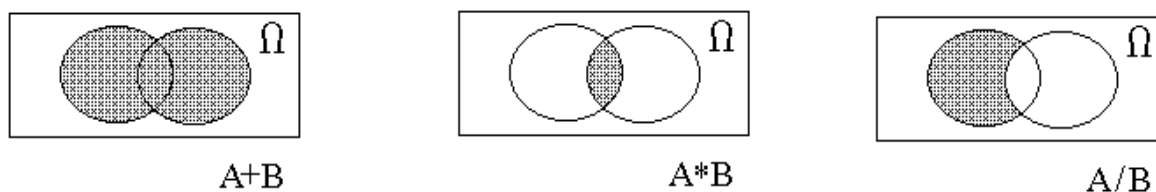
Misol:

$P = A \cdot B$ tushgan raqam juft va uchga bo'linadi. $P = \{\omega_6\}$.

Ikki hodisa ayirmasi $A - B$ deb, A-hodisaning B hodisaga tegishli bo'lmagan elementar hodisalari to'plamiga aytiladi.

Misol:

$A - B$ - tushgan raqam juft, lekin uchga bo'linmaydi. $A - B = \{\omega_2, \omega_4\}$. Bu misollarni yaqqol tasavvur etish uchun Venn diagrammasiga murojaat etamiz. Ω - to'g'ri to'rt burchakka tegishli bo'lgan nuqtalar to'plami.



Tajribada ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa deb, tarkibida elementar hodisa bo'lmagan bo'sh to'plamga aytiladi va $\emptyset$ bilan belgilanadi.

Misol: Soqqa tashlanganda tushgan raqam 6 dan katta.

Muqarrar hodisa deb $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ to'plamga aytamiz.

Misol: Soqqa tashlanganda tushgan raqam 6 dan katta emas.

Ikki yoki undan ortiq hodisa birgalikda deyiladi, agarda ularning tarkibida hech bo'lmaganda, bitta umumiy elementar hodisa bo'lsa. Aks holda ular birgalikda emas deyiladi. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ko'paytmasi har doim mumkin bo'lmagan hodisadir.

Misol:

Agar yuqorida kiritilgan A, B, C, K hodisalarni qarasak:

⁶ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

A va B - birgalikda $AB = \{\omega_6\}$

A va C - birgalikda $AC = \{\omega_2\}$

A va K – birgalikda emas $AK = \emptyset$

B va C - birgalikda emas $BC = \emptyset$

V va K - birgalikda $BK = \{\omega_3\}$

A hodisaga **qarama-qarshi hodisa deb**⁷, A hodisaga kirmagan barcha elementar hodisalar to'plamiga aytamiz va $\bar{A}$ bilan belgilaymiz.

Misol:

$$\bar{A} = K. \quad \bar{B} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$$

$A_1, A_2, \dots, A_N$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi, agarda $A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$ va $A_1 + A_2 + \dots + A_N = \Omega$ bo'lsa.

Misol:

Ikkita qarama-qarshi hodisa birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi. Masalan A va K. Agar A hodisaning ro'y berishi V hodisaning ro'y berishiga olib kelsa, u holda A hodisa V hodisani ergashtiradi, yoki A dan V **kelib chiqadi** deb aytiladi va $A \subset B$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda har bir A hodisaga tegishli elementar hodisa, V-hodisaga ham tegishli bo'ladi. Agar $A \subset B$ va bir vaqtda $B \subset A$ bo'lsa, u holda A va V hodisalar teng kuchli deb ataladi va $A=V$ ko'rinishda belgilanadi. Bularni Venn diagrammasida quyidagicha tasvirlash mumkin.

A va B birgalikda	A va B birgalikda emas	A va B lar qarama-qarshi	Birgalikda bo'lmagan hodisalar to'la gruppasi	$A \subset B$

Yuqorida aniqlangan hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega.

1) $A + B = B + A$

2) $A \cdot B = B \cdot A$

⁷ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

- | | |
|--|--|
| 3) $A + A = A$ | 4) $A \cdot A = A$ |
| 5) $A + \bar{A} = \Omega$ | 6) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ |
| 7) $A + \emptyset = A$ | 8) $A \cdot \emptyset = \emptyset$ |
| 9) $A + \Omega = \Omega$ | 10) $A \cdot \Omega = A$ |
| 11) $A \setminus B = A\bar{B}$ | 12) $\bar{\emptyset} = \Omega$ |
| 13) $A(B+C) = AB + AC$ | 14) $A + BC = (A+B)(A+C)$ |
| 15) $\overline{\cup_{\alpha} A_{\alpha}} = \cap_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}$ | 16) $\overline{\cap_{\alpha} A_{\alpha}} = \cup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}$ |
| 17) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$ | |

Biz yuqorida ehtimollikni hodisadan olingan sonli funksiya sifatida harakterlagan edik. Haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar argumentining barcha qiymatlarida aniqlanishi shart bo'lmaganligi kabi, Ω to'plamning ixtiyoriy tuplam ostlari uchun ehtimolni aniqlash har doim ham mumkin bo'lavermaydi. To'plam ostlari sinflarini cheklashga to'g'ri kelgan hollarda, biz bu sinflardan, yuqorida kiritilgan hodisalar ustidagi amallarga nisbatan yopiqqligini talab etamiz. Ω -to'plamning to'plam ostlaridan tuzilgan to'plamlar sinfini $\mathfrak{I}$ bilan belgilaymiz.

Ta'rif. $\mathfrak{I}$ - algebra⁸ deb ataladi, agarda

A1. $\emptyset \in \mathfrak{I}, \Omega \in \mathfrak{I}$;

A2. $A \in \mathfrak{I}$ dan $\bar{A} \in \mathfrak{I}$ kelib chiqsa;

A3. $A \in \mathfrak{I}$ va $B \in \mathfrak{I}$ dan $A \cup B \in \mathfrak{I}$ va $A \cap B \in \mathfrak{I}$ kelib chiqsa.

Ta'rif. Algebra $\mathfrak{I}$ ni σ - algebra deb ataymiz agarda

A3. $A_n \in \mathfrak{I}, n = 1, 2, \dots$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$ kelib chiqsa⁹.

Misol: $\mathfrak{I} = \{\emptyset, \Omega\}$ - eng kichik algebraga misol.

Agar Ω -chekli to'plam bo'lsa, u holda barcha to'plam ostlarining sistemasi ham cheklidir va Ω ning barcha to'plam ostlari soni 2^n ga teng. Bu holda Ω ning barcha to'plam ostlari sinfi $\mathfrak{I}$ algebra tashkil etadi. Agar Ω -sanoqli yoki uzluksiz to'plam bo'lsa, u holda to'plam ostlari, sinfidan σ -algebra bo'lishligini talab etishga to'g'ri keladi. Chunki bu holda to'plam

⁸ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

⁹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

ostlari sinfi cheksiz ko'p elementlardan tashkil topgan bo'lib shu sinf to'plamlari ustida amallar bajarilganda har doim ham yana shu sinfga tegishli to'plam hosil bo'lavermaydi.

Nazorat savollari:

1. Elementar hodisalar fazosi nima?
2. Tasodifiy hodisa nima?
3. Hodisalar ustida qanday amallar bor?
4. Hodisalar algebrasi va σ algebrasi nima?

Test savollari:

1. Tajriba ikkita tanga tashlashdan iborat bulsa, elementar hodisalar fazosi topilsin.
A. $\Omega=\{g,r\}$ B. $\Omega=\{gg,gr,rg,rr\}$ C. $\Omega=\{g\}$ D. $\Omega=\{r\}$
2. Tajriba bitta tanga tashlashdan iborat bulsa, hodisalar algebrasi topilsin.
A. $\mathfrak{I}=\{\emptyset,\Omega,\{g\},\{r\}\}$ B. $\mathfrak{I}=\{\Omega,\{g\},\{r\}\}$ C. $\mathfrak{I}=\{\emptyset,\{g\},\{r\}\}$ D. $\mathfrak{I}=\{\emptyset,\Omega\}$
3. Tajriba bitta kubik tashlashdan iborat bo'lsa, $A=\{1,2,3\}$ hodisaga teskari hodisa topilsin.
A. $\{4,5,6\}$ B. $\{1,3,5\}$ C. $\{2,4,6\}$ D. $\{1,2,3,4,5\}$
4. Agar Ω elementar hodisalar fazosi n ta elementdan iborat bo'lsa, Hodisalar algebrasida nechta element bor.
A. $2n$ B. n C. 2^n D. n^2

Amaliy mashg'ulotga doir mashqlar:

1. Tajriba ikkita tanga tashlashdan iborat bo'lsa, $A=\{\text{bitta gerb tushishi}\}$, $B=\{\text{kamida bitta gerb tushishi}\}$ hodisalar ustida amallar bajarilsin.

Yechilishi: Ikkita tanga tashlaganda elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{gg,gr,rg,rr\}$, $A=\{gr,rg\}$, $B=\{gr,rg,gg\}$ bo'ladi. Endi hodisalar ustida amallarni ko'rib chiqamiz;

$$A \cup B = \{gr,rg,gg\},$$

$$A \cap B = \{gr,rg\},$$

$$A - B = \{\emptyset\},$$

$$B - A = \{\emptyset\},$$

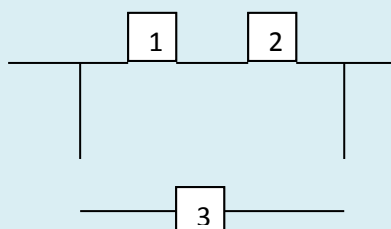
$$\overline{A} = \{gg,rr\},$$

$$\overline{B} = \{rr\}.$$

2. Elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{1,2,3\}$ ko'rinishda bo'lsa, hodisalar algebrasi topilsin.

Yechilishi: Ω da 3 ta element bo'lgani uchun, hodisalar algebrasida 2^3 ta element bo'ladi, yani $\mathfrak{F}=\{\Omega, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ bo'ladi.

3. Quyidagi zanjirda 3 ta ulatgich bor. $A_k = \{k\text{-ulatgich yoqilgan}\}$, $k=1,2,3$, $B = \{\text{zanjirdan tok o'tish}\}$ hodisalar qaralmoqda. B hodisa A_k hodisalar orqali ifodalansin;

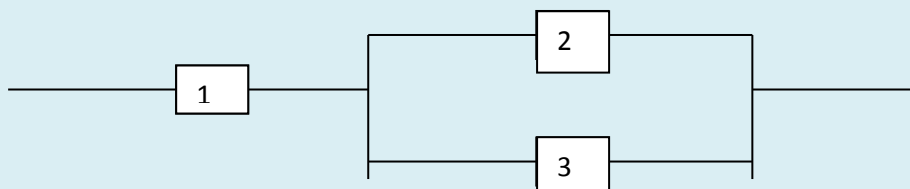


$$B = A_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3 + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3}.$$

4. Tajriba bitta kubik tashlashdan iborat. $A = \{\text{juft raqam tushishi}\}$, $B = \{\text{ko'pi bilan 3 raqam tushishi}\}$ hodisalar ustida amallar bajarilsin.

5. $\Omega = \{a, b, c\}$ bo'lsa, hodisalar algebrasi topilsin.

6. Quyidagi zanjirda 3 ta ulatgich bor. $A_k = \{k\text{-ulatgich yoqilgan}\}$, $k=1,2,3$, $B = \{\text{zanjirdan tok o'tish}\}$ hodisalar qaralmoqda. B hodisa A_k hodisalar orqali ifodalansin;



7. Uchta tanga tashlanmoqda. $A = \{\text{bitta gerb tushishi}\}$, $B = \{\text{ko'pi bilan bitta gerb tushishi}\}$ hodisalar ustida amallar bajarilsin.

8. Tetraedrning yon yoqlari oq, qora, sariq, yashil ranglar bilan bo'yalgan. bo'lib, tajriba tetraedr tashlashdan iborat. Hodisalar algebrasi topilsin.

9. $A = \{a, b, c, d\}$ va $B = \{a, c, d, f, k\}$ hodisalarining yig'indisi, ko'paytmasi va ayirmasi topilsin.

10. A hodisa bitta tanga tashlaganda gerb tushish hodisasi, B esa bitta kubik tashlaganda juft raqam tushish hodisasi bo'lsin. Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi topilsin.

2-MA'RUZA EHTIMOLLIKNING KLASSIK TA'RIFI. GEOMETRIK EHTIMOLLIK. EHTIMOLNING STATISTIK TA'RIFI. EHTIMOLLAR NAZARIYASI AKSIOMATIK ASOSIDA QURISH

REJA:

- 2.1 Ehtimollar fazosi
- 2.2 Ehtimolning klassik ta'rifi
- 2.3 Ehtimolning geometrik ta'rifi
- 2.4 Nisbiy chastota va statistik ehtimol

KALIT SO'ZLAR:

Ehtimollik, ehtimollar fazosi, ehtimol funksiyasi, hodisa chastotasi, hodisa nisbiy chastotasi, ehtimollik hossalari, statistik ehtimollik.

2.1 Ehtimollar fazosi.

Ta'rif. σ -algebra $\mathfrak{F}$ ustida aniqlangan P-sonli funksiyani hodisaning **ehtimoli**¹⁰ deb ataymiz, agarda

R1. $P(A) \geq 0$, barcha $A \in \mathfrak{F}$ lar uchun,

R2. $P(\Omega) = 1$,

R3. $i \neq j$ larda $A_i \cdot A_j = \emptyset$ bo'lgan $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ hodisalar uchun $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Endi biz $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - uchlikni **ehtimollar fazosi** deb ataymiz. Shunday qilib biz tasodifiy tajribaning matematik modelini qurdik.

2.2 Ehtimolning klassik ta'rifi.

Agar $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ - chekli elementar hodisalar to'plamini qarasak va $\mathfrak{F}$ deb Ω ning barcha to'plam ostlarini olsak, u holda $\mathfrak{F}$ σ -algebra bo'ladi. $P(A)$ ehtimollik funksiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1, \quad P(\omega_i) \geq 0, \quad P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i), \quad P(\emptyset) = 0.$$

Shunday aniqlangan $P(A)$ funksiya ehtimollikning barcha shartlarini bajaradi.

¹⁰ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Agar biz $|A|$ bilan A to'plamning elementlari, sonini belgilasak va ixtiyoriy $1 \leq i \leq n$ da $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, ya'ni ω_i larning ro'y berishini teng imkoniyatli deb faraz qilsak ehtimollikning klassik ta'rifi kelib chiqadi.

$$P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) \Rightarrow 1 = P(\omega_i) \cdot |\Omega|$$

$$\text{yoki} \quad P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} \Rightarrow P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = |A| \cdot P(\omega_i) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ya'ni

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (1)$$

$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$ bo'lgan hol klassik bo'lgani uchun, (1) tenglik ehtimollikning klassik ta'rifi deb ataladi. Ehtimollikning klassik ta'rifidan foydalanganda A to'plam va Ω fazodagi elementar hodisalar sonini hisoblashga to'g'ri keladi. Ehtimol masalalarida bularni hisoblash ancha qiyinchilik tug'dirgani uchun kombinatorika usullaridan foydalanishga to'g'ri keladi.

Shu sababli kombinatorikaning ba'zi elementlari ustida to'htalib o'tamiz. Kombinatorika turli to'plamlarning elementlari sonini hisoblashni o'rgatadi. Kombinatorikada muhim rol o'ynaydigan ikki qoyida bor: qo'shish va ko'paytirish qoyidalar.

Qo'shish qoyidasi: Agar A to'plamning elementlari soni $|A| = n$ va B to'plamning elementlari soni $|B| = m$ bo'lib, A va B to'plamlar o'zaro kesishmaydigan chekli to'plamlar bo'lsa $|A + B| = n + m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoyidasi: Bizga $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsa, bu ikki to'plamdan tuzilgan, barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C = \{(a_i, b_j) / i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$ $n \cdot m$ elementdan iborat bo'ladi.

O'rinlashtirishlar soni. Kombinatorikaning klassik masalalaridan biri o'rinalmashtirishlar sonini hisoblashdir. Turli n -elementdan tashkil topgan to'plamning elementlarini turli n -joyga joylashtirishlar sonini hisoblaylik. Misol uchun $A = \{1, 2, 3\}$. Ularni quyidagicha turlicha joylashtirish mumkin: $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 2, 1\}, \{3, 1, 2\}$. Bunday joylashtirishlar soni $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ga teng. Umuman olganda n -elementdan, turli n -joyga joylashtirishlar soni $P_n = n!$ ga teng.

Tanlashlar soni: n-elementdan m-tadan necha hil usul bilan tanlash mumkin. Misol: $A = \{1,2,3\}$. Ikkitadan tanlasak $\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$ hosil bo'ladi. Tanlashlar soni 3 ga teng.

Umuman olganda n-elementdan m-tadan tanlashlar soni $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ¹¹

Kombinatorikaning keyingi masalalaridan biri o'rinlashtirish masalasidir. Misol: $A = \{1,2,3\}$ to'plam berilgan bo'lsa uning ikki elementidan tashkil topgan to'plamlardan necha hil usul bilan tuzish mumkin.

$$\{1,2\}, \{2,1\}, \{1,3\}, \{3,1\}, \{2,3\}, \{3,2\}.$$

Bunday to'plamlar soni $A_3^2 = 2 \cdot 3 = 6$ ta. Umuman olganda

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Endi biz to'plam Itganda hodisani, to'plam elementi deganda hodisadagi elementar hodisalarni tushunsak, to'plam uchun aniqlangan kombinatorika elementlarini hodisadagi elementar hodisalar sonini aniqlashda ishlata olamiz.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ -ehtimollar fazosida P-ehtimol funksiyasining xossalarini keltiramiz.

$$1) A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

Isboti:

$$B = A + (B \setminus A) \text{ va } A \cap (B \setminus A) = \emptyset \text{ bo'lgani uchun}$$

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \quad (2)$$

$$2) A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Isboti:

(2) dan kelib chiqadi

$$3) \text{ Ixtiyoriy } A \in \mathfrak{F} \text{ uchun } 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Isboti:

(2) xossa va $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ munosabatlardan kelib chiqadi.

$$4) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Isboti:

¹¹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

A3. shartdan, $A + \bar{A} = \Omega$ va $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ munosabatlar orqali kelib chiqadi.

5) $P(\emptyset) = 0$.

Isboti:

4) xossa bilan A2 shartdan kelib chiqadi.

6) Ixtiyoriy $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathfrak{F}$ lar uchun

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (3)$$

Isboti:

$B_k = A_k \setminus (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$ desak $\bigcup_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n B_k$ bo'ladi. Endi A3 shartdan

$B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ bo'lgani uchun $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(B_k)$ kelib chiqadi. Bundan esa $B_k \subseteq A_k$

va 2) xossaga ko'ra (3) tengsizlik kelib chiqadi.

7) Ixtiyoriy A va B lar uchun $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Isboti:

$A \cup B = A + (B \setminus AB)$ bo'lgani uchun A3 shartdan $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus AB)$ bo'ladi. Endi 1) xossadan $P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB)$ bo'lgani uchun xossa isbot bo'ldi.

2.3 Ehtimolning geometrik ta'rifi.

Ehtimollikning klassik ta'rifida elementar hodisalar soni chekli, deb faraz qilinadi. Amaliyotda esa ko'pincha mumkin bo'lgan natijalari soni cheksiz bo'lgan tajribalar uchraydi. Bunday hollarda klassik ta'rifni qo'llanib bo'lmaydi. Bunday hollarda ba'zan ehtimollikni hisoblashning boshqacha usulidan foydalanish mumkin bo'lib, bunda ham avvalgidек elementar hodisalarning teng imkoniyatlilik tushunchasi asosiy ahamiyatga ega bo'lib qolaveradi.

Ehtimollikning **geometrik ta'rifi**¹² deb ataladigan usuldan Ω - n o'lchamli evklid fazosining cheklangan to'plami bo'lgan holda foydalanish mumkin. **Hodisa deb** Ω ning o'lchovini aniqlab bo'ladigan to'plam ostini qaraymiz. A deb Ω ning barcha o'lchovga ega bo'lgan to'plam ostlari sinfini belgilaymiz. U holda A hodisaning ehtimoli deb quyidagiga aytamiz:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)};$$

¹² Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$\mu(A)$ - A to'plamning o'lchami. ($n=1$ bo'lganda uzunlik, $n=2$ bo'lganda yuza, $n=3$ bo'lganda hajm).

2.4 Nisbiy chastota va statistik ehtimol.

n ta bir xil tajriba ketma-ket o'tkazilgan bo'lib, ularning har birida A hodisa ro'y bergan yoki ro'y bermagan bo'lsin.

Ta'rif. A hodisaning berilgan tajribalar ketma - ketligidagi nisbiy chastotasi¹³ deb A hodisa ro'y bergan tajribalar soni m ning o'tkazilgan barcha tajribalar soni n ga nisbati aytiladi.

$$W(A) = \frac{m}{n};$$

Tajribalar soni oshgan sari nisbiy chastota ehtimolga cheksiz yaqinlashib boradi. Shuning uchun nisbiy chastotani taxminan hodisaning ehtimoliga teng deb qabul etishadi.

Ehtimolning klassik ta'rifi elementar hodisalar fazosi Ω - chekli, deb faraz qiladi. Tajribada esa ko'plab cheksiz sondagi elementar hodisalar fazosi uchraydi. Mana shu hol ham klassik ta'rifning chegaralanganligini ko'rsatadi.

Klassik ta'rifning yana bir kamchiligi shundaki, juda ko'p hollarda tajriba natijalarini elementar hodisalar to'plami ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi. Undan ham qiyinrog'i shuki, elementar hodisalarning ro'y berishi teng imkoniyatli deb hisoblashga asos har doim ham topilavermaydi. Odatda elementar hodisalarning teng imkoniyatlilikini simmetriya tushunchasiga suyanib kiritishadi. Lekin simmetriya tushunchasiga ega bo'lgan masalalar amaliyotda juda kam uchraydi. Shu kamchiliklarni bartaraf etish maqsadida ehtimolning klassik ta'rifi bilan bir qatorda, ehtimollikning statistik ta'rifini ham berishadi. A hodisaning statistik ehtimoli deb A hodisaning nisbiy chastotasi olinadi. Endi ehtimolning klassik ta'rifi bilan statistik ta'rifni solishtirsak shunday xulosaga kelamiz.

Ehtimolning klassik ta'rifi tajriba o'tkazilishini ko'zda tutmaydi. Statistik ehtimol esa tajriba o'tkazgandan so'ng topiladi. Boshqacha aytganda klassik ehtimol tajribagacha topilsa (a priori), statistik ehtimol tajribadan so'ng hisoblanadi (a posteriori).

Nazorat savollari:

1. Ehtimollar fazosi nima ?
2. Ehtimollikning klassik ta'rifi qanday ?
3. Ehtimollikning geometric ta'rifi qanday ?
4. Ehtimollikning statistic ta'rifi qanday ?

¹³ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Test savollari:

- 3 ta tanga tashlanganda 1 ta gerb tushish ehtimolligi topilsin.
A. $4/8$ B. $3/8$ C. $1/2$ D. $1/4$
- Ikkita kubik tashlanganda 1 ta juft raqam tushish ehtimolligi topilsin.
A. $1/4$ B. $1/2$ C. $1/36$ D. $1/3$
- Idishda ikkita oq va ikkita qora sharlar bor. Idishdan ikkita shar olindi, bittasi oq bo'lish ehtimolligi topilsin.
A. $1/2$ B. $1/3$ C. $2/3$ D. $1/4$
- Tomoni bir birlik bo'lgan kvadratga nuqta tashlanmoqda, nuqtadan kvadrat markazigacha bo'lgan masofa x dan ($x < 1/2$) oshmaslik ehtimolligi topilsin.
A. π^2 B. πx^2 C. x^2 D. $2\pi x$

Amaliy mashg'ulotga doir mashqlar:

- Tajriba 3 ta tanga tashlashdan iborat. Kamida 2 ta gerb tushish ehtimolligi topilsin.

Yechilishi: 3 ta tanga tashlanganda barcha variantlar $2^3 = 8$ ta bo'ladi; yani $\Omega = \{ggg, ggr, grg, rgg, grr, rrg, rrr\}$ bo'ladi, kamida 2 ta gerb tushish hodisasiga qulaylik yaratuvchi variantlar 4 ta bo'ladi. U holda ehtimollikning klassik ta'rifiga ko'ra $P = 1/2$ boladi.

- Idishda 5 ta oq va 7 ta qora sharlar bor. Idishdan 4 ta shar olindi, olingan sharlar orasida 2 ta oq shar bo'lish ehtimolligi topilsin.

Yechilishi: Idishdan 4 ta shar qaytib qo'yimaslik, tartiblanmagan usulda olinadi, shuning uchun barcha variantlar soni $C_{12}^4 = 495$ ta bo'ladi, qaralayotgan hodisaga qulaylik yaratuvchi variantlar soni $C_5^2 C_7^2 = 210$ ta bo'ladi. U holda ehtimollikning klassik ta'rifiga ko'ra $P = 210/495 = 0,42$ bo'ladi.

- Tomoni a ga teng bo'lgan kvadratlar bilan qoplangan parket polga radiusi r ga teng bo'lgan tanga tashlanmoqda. Shu tanga hech qaysi kvadrat tomoniga tushmaslik ehtimolligi topilsin.

Yechilishi: Tanga ixtiyoriy kvadratning biriga tushishi muqarrar hodisa bo'lgani uchun, ehtimollikning geometric ta'rifiga ko'ra $S_{\Omega} = a^2$ bo'ladi. Tanga kvadrat ichiga to'liq joylashishi uchun tanganing markazi kvadrat tomonidan r masofa ichkariga tushishi kerak. Demak $P = (a-2r)^2/a^2$ bo'ladi.

4. Ikkita shoshqoltosh tashlanganda raqamlar yig'indisi 4 dan oshmaslik ehtimolligi topilsin.

5. 36 ta o'yin kartasidan ixtiyoriy ravishda 3 tasi tanlanmoqda, tanlanganlar orasida 1 ta TUZ va 1 ta DAMA bo'lish ehtimolligi topilsin.

6. L uzunlikdagi kesmaga nuqta tashlanmoqda, kesmaning kichik bo'lagining uzunligi $L/3$ dan oshmaslik ehtimolligi topilsin.

7. Birlik aylanaga nuqta tashlanmoqda. Nuqtadan aylanagacha bo'lgan masofa x dan ($x < 1/2$) oshmaslik ehtimolligi topilsin.

8. 4 xonali avtomobil nomerida dastlabki 2 ta raqam yig'indisi keyingi 2 ta raqam yig'indisiga teng bo'lish ehtimolligi topilsin.

9. 2 ta qurilmadan T vaqt davomida signalizatorga signallar yuborilmoqda. 2 ta qurilmadan kelayotgan signallarning kelish vaqtlari orasidagi farq t vaqt birligidandan oshmasa signalizator ishga tushadi. Signalizatorning ishlash ehtimolligi topilsin.

10. 8 juft oyoq kiyim bor. Shulardan 4 ta poyi tanlanmoqda. Tanlangan oyoq kiyim poylari har hil juftidan bo'lish ehtimolligi topilsin.

3-MA'RUZA SHARTLI EHTIMOLLIK. EHTIMOLLARNI QO'SHISH VA KO'PAYTIRISH TEOREMALARI. HODISALAR TO'LIQSIZLIGI. TO'LA EHTIMOLLIK VA BAYES FORMULASI

REJA:

- 3.1 Shartli ehtimollik
- 3.2 Hodisalarning bog'liqsizligi
- 3.3 To'la ehtimollik formulasi
- 3.4 Bayes formulalari

KALIT SO'LAR:

Shartli ehtimollik. Hodisalarning to'la gruppasi. To'la ehtimollik. Bayes formulasi. O'zaro bog'liq hodisalar. Bog'liqsiz hodisalar.

3.1 Shartli ehtimollik.

Ta'rif: Ixtiyoriy $B \in \mathfrak{F}$ uchun $P(B) > 0$ bo'lsin, A hodisaning B hodisa ro'y berdi degan shartda hisoblangan ehtimolligi A hodisaning V hodisa ro'y berish shartidagi **shartli ehtimolligi**¹⁴ deb ataladi va $P(A/B)$ bilan belgilanib quyidagicha hisoblanadi

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

Agar B - fiksirlangan bo'lib, $A \in \mathfrak{F}$ hodisa uchun $P(A/B)$ ehtimolni kiritsak, yangi $(\Omega, \mathfrak{F}, P_B)$ ehtimollar fazosi hosil bo'ladi. Bu yerda $P_B(A) = P(A/B)$. P_B - ning ehtimollik shartlarini bajarishini tekshiramiz.

$$1) P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \leq 0$$

$$2) P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) Agar $A_1 A_2 = \emptyset$ bo'lsa, $(A_1 B) \cap (A_2 B) = \emptyset$ bo'ladi.

Shuning uchun

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 / B) &= \frac{P((A_1 + A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B + A_2 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} = \\ &= P(A_1 / B) + P(A_2 / B) \end{aligned}$$

¹⁴ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Bu xossa sanoqli sondagi A_n lar uchun ham o'rinli bo'ladi.

(1) dan quyidagi hosil bo'ladi:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \setminus B) \quad (2)$$

Bu tenglikni ba'zan ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasi ham deb ataydilar.

Misol:

Idishda M dona oq va N-M dona qora sharlar bor. Ketma-ket idishdan ikkita shar olingan. Ikkala sharning oq bo'lishlik ehtimolini toping.

Yechish:

Bu ehtimolni (2) formula orqali topish mumkin.

A - birinchi olingan shar oq.

B - ikkinchi olingan shar oq.

Bu holda

$$P(A) = \frac{M}{N}; \quad P(B/A) = \frac{M-1}{N-1}$$

AB - ikkala olingan shar oq.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{M \cdot (M-1)}{N \cdot (N-1)};$$

Agar biz (2) tenglikda 2-ta hodisa o'rniga N-ta $A_1, A_2, \dots, A_N$ hodisalar ketma-ketligini qarasak quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

Teorema 1

Agar $A_1, A_2, \dots, A_N$ hodisalar uchun $P(A_1, A_2, \dots, A_{N-1}) > 0$ bo'lsa, u holda

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_N) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_N/A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{N-1}) \quad (3)$$

3.2 Hodisalarning bog'liqsizligi.

Hodisalarning bog'liqsizligi tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Agar A va B hodisalar uchun $P(B) > 0$ bo'lsa $P(A/B)$ shartli ehtimol mavjud bo'ladi. Agar $P(A/B) = P(A)$ bo'lsa, A hodisa B ga **bog'liq emas** deyiladi. Agar $P(B) > 0$ bo'lsa, bu holda

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)} = P(B) \text{ bo'ladi. Demak A ning B dan bog'liq emasligidan}$$

B ning ham A dan bog'liq emasligi kelib chiqadi. Teorema 1 dan o'zaro bog'liq bo'lmagan A

va B hodisalar uchun $P(AB) = P(A)P(B)$ ekanligi kelib chiqadi. Ko'p hollarda bu tenglikni bog'liqsizlikning ta'rifi sifatida qabul qilishadi. Ya'ni ixtiyoriy A va B hodisalar uchun $P(AB) = P(A)P(B)$ tenglik bajarilsa A va B lar **bog'liq emas** deyiladi, agar tenglik bajarilmasa A va B lar **o'zaro bog'liq** deyiladi.

Misol: 52 ta kartadan iborat kartalar dastasidan tavakkaliga karta olingan. A - "tuz" kartasi chiqishi, B - "childik" kartasi chiqishi hodisasi bo'lsa, u holda AB – «childik tuz» kartasi chiqishi hodisasidir. A - hodisa to'rtta elementar hodisadan tashkil topgan, B - hodisa 13 ta elementar hodisadan tashkil topgan. Shuning uchun:

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4};$$

$$P(AB) = \frac{1}{52} = P(A)P(B);$$

Demak A va B lar o'zaro bog'liq emas. Agar kartalar dastasiga yana bitta karta, "joker" kartasini qo'shsak, u holda A va B lar o'zaro bog'liq bo'lib qoladi. Ya'ni:

$$P(A) = \frac{4}{53}; \quad P(B) = \frac{13}{53}; \quad P(AB) = \frac{1}{53};$$

Ko'rinib turibdiki

$$P(AB) \neq P(A)P(B);$$

3.3 To'la ehtimollik formulasi.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil qilsin.

2-Teorema Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etib, barcha $1 \leq k \leq n$ lar uchun $P(A_k) > 0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy B hodisa uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P(B/A_k) \quad (4).$$

Bu tenglikka **to'la ehtimollik formulasi** deyiladi.

Isboti:

$B = B \cdot \Omega = BA_1 + \dots + BA_n$ bo'lib, $BA_i \cap BA_j = \emptyset$, $i \neq j$ - lar uchun. Bu tenglikdan teorema 1 ga ko'ra quyidagi kelib chiqadi:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(BA_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P(B/A_k)$$

Misol:

Idishda M dona oq va N-M dona qora shar bor. Ketma-ket idishdan ikkita shar olingan. Ikkinchi olingan shar oq bo'lishlik ehtimolini toping:

Yechish:

B - ikkinchi olingan shar oq.

A - birinchi olingan shar oq.

$\bar{A}$ - birinchi olingan shar qora

$$P(A) = \frac{M}{N}; P(\bar{A}) = \frac{N-M}{N}; P(B/A) = \frac{M-1}{N-1}; P(B/\bar{A}) = \frac{M}{N-1};$$

to'la ehtimollik formulasiga asosan

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} +$$

$$+ \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N-1} = \frac{M}{N};$$

Ya'ni: $P(A) = P(B)$

3.4 Bayes formulalari¹⁵.

Teorema 3 $A_1, A_2, \dots, A_N$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasi bo'lsin va $P(A_k) > 0$. Agar ixtiyoriy B - hodisa uchun $P(B) > 0$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)} \quad (5)$$

Isboti:

Teorema 1 ga ko'ra $P(A_k B) = P(A_k)P(B/A_k) = P(B) \cdot P(A_k/B)$. Endi $P(B)$ ga to'la ehtimollik formulasini qo'llab (5) tenglikni hosil qilamiz.

Misol:

Ikkita idish bor bo'lib, ikkalasida ham N donadan shar bor. Birinchisida M_1 oq shar, ikkinchisida esa M_2 oq shar bor. Tajriba quyidagidan iborat: avval $\frac{1}{2}$ ehtimollik bilan birinchi yoki ikkinchi idish tanlanadi, so'ngra tanlangan idishdan tavsavakaliga n dona shar quyidagicha tartibda olinadi: har safar shar olingach uning rangi aniqlanib yana idishga qaytarib solinadi. Shu usulda olingan n dona sharning barchasi oq bo'lishi ehtimolini toping

¹⁵ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Yechish:

B - tanlangan barcha n dona sharlar oq.

Bu holda ikkita gipotezaga egamiz.

A_1 - birinchi idish tanlangan

A_2 - ikkinchi idish tanlangan.

Masalaning shartiga ko'ra:

$$P(A_1) = P(A_2) = 0.5 \quad P(B/A_k) = \left(\frac{M_k}{N}\right)^n; k = 1, 2;$$

Beyes formulasiga ko'ra

$$P(A_k/B) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{M_k}{N}\right)^n}{\frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{N}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{M_2}{N}\right)^n} = \frac{M_k^n}{M_1^n + M_2^n}; k = 1, 2;$$

Agar $M_2 < M_1$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da

$$P(A_1/B) = \frac{1}{1 + \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^n} \rightarrow 1$$

Nazorat savollari:

1. Shartli ehtimollik qanday ifodalanadi?
2. To'la ehtimollik formulasi qanday ifodalanadi?
3. Bayes formulasi qanday ifodalanadi?
4. Qanday hodisalar bogliqsiz deyiladi?

Test savollari:

1. Shartli ehtimollik qanday hisoblanadi?
A. $P_B(A) = P(AB)$ B. $P_B(A) = P(A)$ C. $P(AB) = P(A)P(B)$ D. $P_B(A) = P(AB)/P(B)$
2. Qanday shart bajarilsa A va B hodisalar bog'liqsiz deyiladi?
A. $P_B(A) = P(AB)$ B. $P_B(A) = P(A)$ C. $P(AB) = P(A)P(B)$ D. $P_B(A) = P(AB)/P(B)$
3. To'la ehtimollik formulasi qanday ifodalanadi?
A. $P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + \dots + P(B_n)P_{Bn}(A)$ B. $P_B(A) = P(A)$ C. $P(AB) = P(A)P(B)$ D. $P_A(B_i) = (P(B_i)P_{Bi}(A))/P(A)$

4. Bayes formulasi qanday ifodalanadi?

A. $P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+\dots+P(B_n)P_{B_n}(A)$ B. $P_B(A)=P(A)$ C. $P(AB)=P(A)P(B)$ D. $P_A(B_i)=(P(B_i)P_{B_i}(A))/P(A)$

Amaliy mashg'ulot uchun mashqlar:

1. Ikkita kubik tashlanganda tushgan raqamlar yig'indisi 5 ga karrali ekanligi ma'lum bo'lsa, bitta kubikda 4 raqam tushish ehtimolligi topilsin.

Yechilishi: Ikkita kubik tashlanganda tushgan raqamlar yig'indisi 5 ga karrali bo'lish hodisasi shartli hodisa bo'lib, barcha variantlar 7 ta, yani

$B=\{14,41,23,32,55,46,64\}$ bo'ladi. B hodisa bajarilganligi sharti ostida 1 ta

kubikda 4 raqam tushish hodisasi 4 ta variantdan iborat, yani $AB=\{14,41,$

$46,64\}$ bo'ladi. Demak shartli ehtimollik ta'rifiga ko'ra $P(A/B)=4/7$ bo'ladi.

2. Idishda ikkita oq va uchta qora sharlar bor. Idishga yana bitta shar (oq yoki qora rangda) solindi, keyin idishdan bitta shar olindi. Olingan shar oq bo'lish ehtimolligi topilsin.

Yechilishi: Idishga solinayotgan shar oq yoki qora qangda bo'lishi mumkin, yani $B_1=\{\text{oq shar solindi}\}$, $B_2=\{\text{qora shar solindi}\}$ hodisalar ro'y beradi.

Buerda B_1 va B_2 hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la

gruppasini tashkil qiladi, hamda $P(B_1)=P(B_2)=1/2$ bo'ladi, chunki B_1 va B_2

hodisalar teng imkoniyatga ega. Ikkala holatda ham idishdan bitta oq shar olish mumkin, yani $A=\{\text{olingan shar oq bo'lishi}\}$

hodisasi albatta ro'y beradi. B_1 hodisa ro'y berganda idishda 3 ta

oq va 3 ta qora sharlar bo'ladi va $P(A/B_1)=1/2$ bo'ladi, B_2 hodisa ro'y

berganda idishda 2 ta oq va 4 ta qora sharlar bo'ladi, $P(A/B_2)=1/3$ bo'ladi.

To'la ehtimollik formulasiga ko'ra $P(A)=1/2*1/2+1/2*1/3=5/12$ bo'ladi.

3. Haridor A1 sotuvchidan 10 ta, A2 sotuvchidan 20 ta, A3 sotuvchidan 30 ta integral sxema sotib oldi. A1 sotuvchi brak sxema sotish ehtimolligi 0,1 ga, A2 sotuvchi brak sxema sotish ehtimolligi 0,2 ga, A3 sotuvchi brak sxema sotish ehtimolligi 0,3 ga teng. Haridor ixtiyoriy sxemani qo'liga oldi. Olingan sxema brak ekanligi ma'lum bo'lsa, bu sxema A1 sotuvchidan sotib olingan bo'lish ehtimolligi topilsin.

4. To'rtta shoshqoltosh tashlanmoqda. Hamma raqamlar juft ekanligi ma'lum bo'lsa, ikkita raqam oltiga teng bo'lish ehtimolligi topilsin.
5. Aloqa tarmog'ida AAAA, BBBB, CCCC harflar ketma-ketligi mos ravishda p_1 , p_2 , p_3 ehtimolliklar bilan uzatilmoqda. Har bitta harf to'g'ri uzatilish ehtimolligi α ga, noto'g'ri uzatilish ehtimolligi $(1 - \alpha)/2$ ga teng. Tarmoq orqali ixtiyoriy harflar ketma-ketligi uzatildi, agar ABCA ketma-ketlik qabul qilingan bo'lsa, tarmoqda AAAA harflar ketma-ketligi uzatilgan bo'lish ehtimolligi topilsin.
6. Konteynerda 30 ta detal bo'lib, 10 tasi 1-zavodda, 20 tasi 2-zavodda ishlab chiqarilgan. 1-zavod brak detal ishlab chiqarish ehtimolligi 0,1 ga, 2-zavod brak detal ishlab chiqarish ehtimolligi 0,2 ga teng. Konteynerdan ixtiyoriy bitta detal olindi. Olingan detal brak bo'lish ehtimolligi topilsin.
7. Idishda 4 ta oq va 5 ta qora sharlar bor. Idishdan 2 ta shar olib tashlandi, keyin idishdan bitta shar olindi. Keyingi olingan bitta shar oq ekanligi ma'lum bo'lsa, dastlab olingan sharlar 2 ta qora bo'lish ekanligi topilsin.

4-MA'RUZA BOG'LIQ BO'LMAGAN TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI. BERNULLI FORMULASI. MUAVR-LAPLASNING LOKAL VA INTEGRAL FORMULALARI. PUASSON TEOREMASI.

REJA:

4.1 Bernulli sxemasi

4.2 Muavr-Laplasning limit teoremlari

4.3 Puasson teoremasi

4.1 Bernulli sxemasi.

Ta'rif: Takrorlanadigan sinovlardan har birining u yoki bu natijasining ehtimolligi boshqa sinovlarda qanday natijalar bo'lganligiga bog'liq bo'lmasa, ular bog'liqmas sinovlar **ketma - ketligini hosil qiladi**¹⁶ deyiladi.

Quyidagicha masalani qaraylik: bir xil sharoitda o'tkaziladigan n ta bog'liqmas sinovning har birida A hodisa $P(A) = p$ ehtimollik bilan ro'y bersa, uning bu n ta sinovda rosa m marta ro'y berish ehtimolligini toping. Izlanayotgan ehtimollikni $P_n(m)$ bilan belgilaymiz.

Masalan, $P_3(2)$ - bog'liqmas 3- ta sinovda A hodisa rosa 2- marta ro'y berish ehtimolligidir.

Bu ehtimollikni bevosita hisoblash mumkin:

$$P_3(2) = P(AA\bar{A} + A\bar{A}A + \bar{A}AA) = P(AA\bar{A}) + P(A\bar{A}A) + P(\bar{A}AA) = 3 \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(\bar{A}) = 3p^2q$$

Bu yerda $q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$. Umumiy holda $P_n(m)$ ehtimollik Bernulli formulasi deb ataladigan ushbu formula bilan hisoblanadi:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \quad q = 1 - p$$

Shu formulani isbotlaymiz: n -ta bog'liqmas sinovda A hodisaning rosa m -marta ma'lum tartibda ro'y berishi, masalan

$$\underbrace{A, A, A, \dots, A}_m, \underbrace{\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, \dots, \bar{A}}_{n-m}$$

kombinatsiya ro'y berish ehtimolligi bog'liqmas hodisalarni ko'paytirish teoremasiga ko'ra $p^m q^{n-m}$ ga teng. Ravshanki, A hodisaning yana m marta, biroq boshqacha tartibda ro'y berishi ehtimolligi yana shunday bo'ladi. A hodisa m marta turli tartibda uchraydigan bunga o'xshash kombinatsiyalar soni guruhlashlar soni C_n^m ga teng. Bizni qiziqtirayotgan B hodisa A hodisaning n ta bog'liqmas sinovda rosa m marta ro'y berishi bajariladigan bu kombinatsiyalarning hammasi birgalikda bo'lmagan hodisalaridir. Shuning uchun

¹⁶ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

birgalikdamos hodisalar uchun R3 aksiomaga ko'ra $P_n(m) = P(B) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Misol:

Elektr energiyasining ishlatilish hajmi bir sutka davomida belgilangan normadan oshmasligi ehtimolligi $p=0,75$ ga teng. Yaqin 6 sutka ichida elektr energiyasining ishlatilish hajmi 4 sutka davomida normadan oshmasligi ehtimolligi topilsin.

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = 0,30$$

4.2 Muavr-Laplasning limit teoremlari.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi:

Agar A hodisaning ro'y berish etimolligi har bir sinovda o'zgarmas va p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lsa, u holda etarlicha katta n lar uchun:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}; \quad (*)$$

Muavr - Laplasning integral teoremasi:

Agar A hodisaning n ta bog'liqmas sinovda ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas va p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lsa, u holda yetarlicha katta n larda A hodisaning m_1 tadan m_2 tagacha ro'y berish ehtimolligi $P(m_1 \leq m \leq m_2)$ taqriban

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx F(x_2) - F(x_1)$$

ga teng, bu yerda

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

- 1- izoh** Sinovlar soni qanchalik katta bo'lsa bu formulalar shunchalik yaxshiroq yaqinlashishlar beradi.
- 2- izoh** $\varphi(x)$ va $F(x)$ funksiyalar uchun jadvallar bor, lekin ular faqat argumentning musbat qiymatlari uchun tuzilgan, chunki $\varphi(x)$ juft, $F(x)$ toq funksiyadir $x > 5$ uchun har doim $F(x) = 0.5$.

4.3 Puasson teoremasi.

Keltirilgan teoremani p ehtimollikning $(0,1)$ oraliqning o'rtalaridagi qiymatlari uchun, yani 0 va 1 dan "uzoqroq" qiymatlari uchun qo'llash maqsadga muvofiqdir; aynan shu holda (*) munosabatdagi approksimatsiyadan kelib chiqadigan xato etarlicha kichik bo'ladi.

Ehtimollik p ning 0 yoki 1 ga yaqin qiymatlarida quyidagi Puasson teoremasini qo'llash tavsiya etiladi.

Puasson teoremasi¹⁷:

Faraz qilaylik, p n ning funktsiyasi bo'lib $n \rightarrow \infty$ da $np \rightarrow \lambda$ bo'lsin, bu erda o'zgarmas $\lambda > 0$, undan tashqari agar $k > n$ bo'lsa, $P_n(k) = 0$ deb hisoblaylik. Quyidagi munosabat o'rinli

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Nazorat savollari:

1. Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi qanday izohlanadi?
2. Bernulli formulasi orqali qanday hodisa ehtimolligi topiladi?
3. Muavr-Laplasning local teoremasini keltiring
4. Muavr-Laplasning integral teoremasini keltiring

¹⁷ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001

5- MA'RUZA DISKRET VA UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR. TASODIFIY MIQDORLARNING TAQSIMOT QONUNI VA UNI BERISH USULLARI. TAQSIMOT FUNKSIYA VA UNING XOSSALARI

Reja:

- 5.1 Diskret tasodifiy miqdorlar.
- 5.2 Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari.
- 5.3 Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi va uning xossalari.
- 5.4 Ehtimollikning zichlik funksiyasi va uning xossalari.

5.1 Diskret tasodifiy miqdorlar

Chekli $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosini qaraymiz. **Tasodifiy miqdor** deb elementar hodisadan olingan sonli funksiya $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ ga aytamiz.

Misol:

Bog'liqmas n ta tajribalarning Bernulli shemasida Ω quyidagi elementar hodisalardan tashkil topgan: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Bu yerda agar i -nchi tajribada A hodisa ro'y bersa $\omega_i = 1$, aks holda $\omega_i = 0$ desak, bu sxemada $\mu = \mu(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ A hodisalarning n ta tajribada ro'y berish soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Agar $g(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ko'p o'zgaruvchili sonli funksiya bo'lsa va $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ lar tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\eta = \eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_r(\omega))$ murakkab funksiya ham tasodifiy miqdor bo'ladi.

Xususan $\sum_{k=1}^2 \xi_k$ va $\prod_{k=1}^2 \xi_k$ lar ham tasodifiy miqdordir. Xar bir hodisa $A \in \mathfrak{F}$ bilan quyidagi tasodifiy miqdorni bog'lash mumkin:

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \bar{A} \end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorga A hodisaning **indikator** deyiladi. Indikatorning xossalari:

$$I_{\emptyset} = 0; I_{\Omega} = 1, I_{AB} = I_A I_B, I_{\bar{A}} = 1 - I_A.$$

Agar $A_1, A_2, \dots, A_N$ lar o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa

$$I_{\sum_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n I_{A_i}.$$

ξ - tasodifiy miqdorning qabul qiluvchi barcha qiymatlari chekli sondagi, $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ lardan iborat bo'lgani uchun diskret tasodifiy miqdor deb ataymiz.

5.2 Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari

ξ -tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb quyidagi B sonli to'plamning funksiyasi sifatida karaluvchi quyidagi ehtimollikka aytamiz:

$$P(\xi \in B) = P\{\omega; \xi(\omega) \in B\}.$$

ξ - tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, uning $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari bilan va $P(\xi = x_i)$ ehtimollar bilan aniqlanadi. $P(\xi = x_i) = p_i$ deb belgilaymiz. Bu holda $P(\xi \in B)$ taqsimot qonunini quyidagi jadval ko'rinishda berish mumkin.

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Bu yerda $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Bu jadval yordamida quyidagi tenglikka ko'ra ixtiyoriy sonli to'plam B ning ehtimolini aniqlash mumkin;

$$P(\xi \in B) = \sum_{x_i \in B} p_i ;$$

Misollar:

1) Bog'liqmas n ta tajribalarning Bernulli sxemasidagi A hodisaning ro'y berishlar soni μ - tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi binomial taqsimot qonuni orqali beriladi:

$$P(\mu = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = 0, 1, \dots, n$$

2) $\{1, 2, \dots, N\}$ dagi tekis taqsimot qonuni:

$$P(\mu = m) = \frac{1}{N}, m = 1, 2, \dots, N$$

Ikki tasodifiy miqdor ξ va η lar uchun $P\{(\xi \in B_1) \cap (\eta \in B_2)\} = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2)$ tenglik ixtiyoriy B_1 va B_2 sonli to'plamlar uchun bajarilsa, ular o'zaro bog'liqsiz¹⁸ deyiladi.

5.3 Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Agar ixtiyoriy $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosini qaraydigan bo'lsak u holda biz ixtiyoriy sonli funksiya $\xi = \xi(\omega)$ ni tasodifiy miqdor deb atay olmaymiz.

Ta'rif: $\xi = \xi(\omega)$ sonli funksiya **tasodifiy miqdor** deyiladi agarda ixtiyoriy $x \in R$ uchun $\{\xi \leq x\} = \{\omega; \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ munosabat bajarilsa.

¹⁸ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Ta’rif: Barcha $x \in R$ lar uchun aniqlangan funksiya $F(x) = F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}$ ga ξ tasodifiy miqdorning **taqsimot funksiyasi**¹⁹ deyiladi. $x_1 < x_2$ sonlar berilgan bo’lsin. U holda

$$\{\xi \leq x_2\} = \{\xi \leq x_1\} \cup \{x_1 < \xi \leq x_2\} \quad (1)$$

$\{\xi \leq x_1\}$ va $\{x_1 < \xi \leq x_2\}$ lar birgalikda bo’lmaganlari uchun (1) dan kelib chiqadiki $P\{\xi \leq x_2\} = P\{\xi \leq x_1\} + P\{x_1 < \xi \leq x_2\}$ va

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \quad (2)$$

Teorema: Taqsimot funksiyasi $F(x)$ quyidagi xossalarga ega:

- 1) $F(x)$ - kamaymaydigan funksiya
- 2) $F(x)$ - o’ngdan uzluksiz funksiya
- 3) $F(+\infty) = 1$
- 4) $F(-\infty) = 0$

Izox:

Ixtiyoriy $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosida aniqlangan $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdor biror intervalda uzluksiz qiymatlar qabul qilgani uchun uni uzluksiz tasodifiy miqdor deb atashadi.

Ta’rif: Agar ikki uzluksiz tasodifiy miqdor ξ va η lar uchun

$F_{\xi\eta}(x_1, x_2) = P(\xi < x_1, \eta < x_2) = P(\xi < x_1) \cdot P(\eta < x_2) = F_{\xi}(x_1) \cdot F_{\eta}(x_2)$ tenglik bajarilsa, u holda ξ va η lar **bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar** deyiladi.

5.4 Ehtimollikning zichlik funksiyasi va uning xossalari.

Biz uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot funksiyasi orqali aniqlagan edik. Bu aniqlash yagona bo’lmay, uzluksiz tasodifiy miqdorni ehtimollikning zichlik funksiyasi orqali ham aniqlash mumkin.

Ta’rif: Agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_{\xi}(x)$ - differensiallanuvchi bo’lsa, u holda uning ehtimolligining **zichlik funksiyasi**²⁰ deb taqsimot funksiyadan olingan hosilaga aytamiz:

$$p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) \quad (1)$$

¹⁹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O’qituvchi, 2001.

²⁰ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O’qituvchi, 2001.

Demak, taqsimot funksiyasi zichlik funksiyaning boshlang'ichi ekan.

Zichlik funksiyaning asosiy xossalari:²¹

Teorema Ixtiyoriy x - lar uchun $p_{\xi}(x) \geq 0$ va

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_{\xi}(x) dx \quad (2).$$

Isboti:

$F_{\xi}(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lgani uchun:

$$p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) \geq 0$$

(2) tenglik quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi.

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) \stackrel{(1)}{=} F_{\xi}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} p_{\xi}(x) dx$$

(1) - Nyuton - Leybnis formulasiga asosan.

Teorema Agar $p_{\xi}(x)$ - zichlik funksiyasi bo'lsa y holda $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$

Isboti:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx &= \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b p_{\xi}(x) dx = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} [F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} F_{\xi}(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F_{\xi}(a) = 1 \end{aligned}$$

Teorema 3 Agar $F_{\xi}(x)$ va $p_{\xi}(x)$ lar mos ravishda taqsimot funksiyasi va zichlik funksiyalari bo'lsalar u holda:

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt$$

Isboti:

²¹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Xosmas integral ta'rif va Nyuton - Leybnis formulasiga ko'ra taqsimot funksiyaning xossalari quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t)dt &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x p_{\xi}(t)dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} (F_{\xi}(x) - F_{\xi}(a)) = \\ &= F_{\xi}(x) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F_{\xi}(a) = F_{\xi}(x) \end{aligned}$$

Misol:

ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p_{\xi}(x) = \frac{a}{1+x^2}$ berilgan. a -sonini aniqlang va taqsimot funksiyasining ko'rinishini toping.

Yechish:

a - parametrni topish uchun Teorema 2 ni qo'llaymiz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{adx}{1+x^2} = a \cdot \arctg x \Big|_{-\infty}^{\infty} = a \cdot \frac{\pi}{2} - a \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\pi$$

Bundan esa $a = \frac{1}{\pi}$ kelib chiqadi. Taqsimot funksiyani topish uchun teorema 3 ni qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{\frac{1}{\pi} dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \arctg t \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \arctg x - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Misol: ξ - tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ a \frac{\ln x}{x^3}, & x > 1 \end{cases}$$

berilgan. a ni toping va $F_{\xi}(x)$ - ni hisoblang:

Yechish:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)dx = \int_{-\infty}^1 p_{\xi}(x)dx + \int_1^{\infty} p_{\xi}(x)dx = \int_1^{\infty} a \frac{\ln x}{x^3} dx =$$

$$= a \left[\frac{\ln x}{-2x^2} \Big|_1^\infty + \frac{1}{2} \int_1^\infty a \frac{dx}{x^3} \right] = \frac{a}{4} \frac{1}{x^2} \Big|_1^\infty = \frac{a}{4} \cdot \left(0 + \frac{1}{1^2} \right) = \frac{a}{4}$$

Bundan $a=4$ kelib chiqadi. $F_\xi(x)$ ni topamiz: $x \leq 1$ bo'lganda $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(x) dx = 0$. $x > 1$ bo'lganda esa

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt = \int_{-\infty}^1 p(t) dt + \int_1^\infty p(t) dt = 4 \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^3} dt = \\ &= 4 \cdot \left[\frac{\ln t}{-2t^2} \Big|_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{dt}{t^3} \right] = 4 \cdot \left(\frac{\ln t}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} \right) \Big|_1^x = 1 - \frac{1 + 2 \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Nazorat savollari:

1. Tasodifiy miqdor nima?
2. Diskret tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi?
3. Uzlüksiz tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi?
4. Taqsimot funktsiya qanday funktsiyaga aytiladi?

6-MA'RUZA TASODIFIY MIQDORNING SONLI XARAKTERISTIKALARI. MATEMATIK KUTILISH VA UNING XOSSALARI. BOSHLANG'ICH VA MARKAZIY MOMENTLAR. DISPERSIYA, O'RTACHA KVADRATIK CHETLANISH

REJA:

- 6.1 Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalari.
- 6.2 Uzlusiz tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalari.
- 6.3 Boshlang'ich va markaziy momentlar.

6.1 Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalari

Biz yukorida tasodifiy miqdor tushunchasi va uning taqsimot qonunini ikki holda kiritdik. Birinchisi: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosi chekli, bu holda kiritilgan tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdorlar deb ataladi. Ikkinchisi: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosi ixtiyoriy, ya'ni Ω - ning elementlari cheksiz ko'p yoki uzluksiz, bu holda kiritilgan tasodifiy miqdorlar uzluksiz tasodifiy miqdorlar deb ataladi.

Yuqorida kiritilgan tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari ularni to'la harakterlaydilar. Ammo ba'zan taqsimot qonunlari noma'lum bo'ladilar va kamroq ma'lumotlar bilan qanoatlanishga to'g'ri keladi. Ba'zan shunday son qiymatlar bilan ishlash maqsadga muvofiq bo'ladiki, bu son qiymatlar tasodifiy miqdorning xususiyatlarini belgilab beradilar. Bunday son qiymatlarni tasodifiy miqdorning sonli harakteristikalari deb ataladi. Eng muhim sonli harakteristikalar sifatida matematik kutilish va dispersiyalarni qarash mumkin.

Bizga X diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni berilgan bo'lsin:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Ta'rif: X -diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb quyidagi yig'indiga aytamiz²²:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Matematik kutilishning xossalari:

- 1) O'zgarmas sonning matematik kutilishi shu o'zgarmas sonning o'ziga teng:

²² Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$$M(C) = C$$

2) O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi oldiga chiqarish mumkin:

$$M(CX) = CM(X)$$

3) Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsalar, u holda:

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

4) Ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar X va Y lar uchun:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

Misollar:

1) O'zaro bog'liqsiz n-ta tajribalarning Bernulli sxemasidagi A hodisaning ro'y berishlar soni μ -diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi:

$$M(\mu) = n \cdot p, \quad p = P(A)$$

2) $\{1, 2, \dots, N\}$ dagi tekis taqsimlangan ξ - diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi:

$$M(\xi) = \frac{1 + N}{2};$$

Shunday ikkita turli tasodifiy miqdor ko'rsatish mumkinki ularning matematik kutilmasi bir xil bo'ladi. Masalan

X: -0,01 0,01

Y: -100 100

P: 0,5 0,5

P: 0,5 0,5

$$M(X) = -0,01 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,5 = 0; \quad M(Y) = -100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 0$$

Demak, tasodifiy miqdorning faqatgina matematik kutilmasini bilish bilan uni harakterlab bo'lmas ekan. Shuning uchun ham matematik kutilmadan tashqari tasodifiy miqdor qabul qiluvchi qiymatlarning matematik kutilma atrofida sochilish darajasini aniqlashimiz kerak bo'ladi.

Ta'rif: X-diskret tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** (tarqoqligi) deb quyidagi matematik kutilmaga aytiladi²³:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

X-tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan bo'lsin:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

²³ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Bu taqsimot konuniga qarab $[X - M(X)]^2$ - tasodifiy miqdorning taqsimot konunini yozish mumkin:

$[x - M(x)]^2 :$	$[x_1 - M(x)]^2$	$[x_2 - M(x)]^2$	$[x_3 - M(x)]^2$	...	$[x_n - M(x)]^2$
P:	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Ta'rif bo'yicha:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = [X_1 - M(X)] \cdot p_1 + [X_2 - M(X)] \cdot p_2 + \dots + [X_n - M(X)] \cdot p_n$$

Amalda dispersiyani hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanishadi:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Dispersiyaning xossalari:

1) $D(C) = 0$

2) $D(CX) = C^2 D(X)$

3) Agar X va Y bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsalar, u holda

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Bundan $D(C + X) = D(X)$ kelib chiqadi

4) X va Y lar bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsalar, u holda

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Misol:

O'zaro bog'liqsiz n-ta tajribalarning Bernulli sxemasidagi A hodisaning ro'y berishlar soni μ -diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$D(\mu) = n \cdot p \cdot q \quad p = P(A) \quad q = 1 - p$$

Dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga o'rtacha kvadratik chetlanish deb ataladi ²⁴ va $\sigma(\mu)$ bilan belgilanadi:

$$\sigma(\mu) = \sqrt{npq}$$

6.2 Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalari

Zichlik funksiyaga ega bo'lgan uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari aniq integral orqali aniqlanadi.

Ta'rif: ξ - uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p_\xi(x)$ ga teng bo'lsa, uning matematik kutilmasi quyidagi aniq integralga teng bo'ladi.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx \quad (1)$$

va dispersiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p_\xi(x) dx \quad (2)$$

Diskret tasodifiy miqdorlarda aniqlangan barcha hisoblash formulalari uzluksiz tasodifiy miqdorlarining sonli harakteristikalarini hisoblashda ham saqlanadi:

$$1) M(a\xi + b) = a \cdot M\xi + b \quad (3)$$

$$2) M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta \quad (4)$$

$$3) D(a\xi + b) = a^2 D\xi \quad (5)$$

$$4) D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \quad (6)$$

(3) - tenglikni isbotlashdan oldin ξ va $a\xi + b$ tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyalari va taqsimot funksiyalari orasidagi bog'lanishni o'rnatamiz

1-Teorema Agar ξ - uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ va zichlik funksiyasi $p_\xi(x)$ bo'lsa, u holda $a\xi + b$ tasodifiy miqdor uchun zichlik funksiya quyidagicha bo'ladi:

$$p_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{|a|} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (7)$$

²⁴ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

taqsimot funksiyasi esa

$$F_{a\xi+b}(x) = F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right), a > 0 \quad (8)$$

$$F_{a\xi+b}(x) = 1 - F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right), a < 0 \quad (9)$$

Isboti:

1) $a > 0$ bo'lsin. U holda:

$$F_{a\xi+b}(x) = P(a\xi + b \leq x) \stackrel{(1)}{=} P\left(\xi \leq \frac{x-b}{a}\right) \stackrel{(2)}{=} F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

(1): $a\xi + b \leq x$ va $\xi \leq \frac{x-b}{a}$ lar teng kuchli bo'lganlari uchun $\{\omega : a\xi + b \leq x\}$ va $\left\{\omega : \xi \leq \frac{x-b}{a}\right\}$ hodisalar teng bo'ladilar. Teng hodisalarning ehtimollari ham teng bo'ladi.

(2): ξ - tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra tenglik o'rinli.

Endi zichlik funksiyaning ta'rifiga ko'ra:

$$p_{a\xi+b}(x) = F'_{a\xi+b}(x) = \left(F'_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} F'_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

$a > 0$ da $|a| = a$ bo'lgani uchun (7) formula isbot bo'ldi. Endi $a < 0$ bo'lgan holni isbotlaymiz.

$a \cdot \xi + b$ - tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra

$$\begin{aligned} F_{a\xi+b}(x) &= P(a\xi + b \leq x) \stackrel{(1)}{=} P\left(\xi \geq \frac{x-b}{a}\right) \stackrel{(2)}{=} 1 - P\left(\xi \leq \frac{x-b}{a}\right) = \\ &= 1 - F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned} \quad 25$$

(1): $a > 0$ bo'lgani uchun $a\xi + b \leq x$ tengsizlik bilan $\xi \leq \frac{x-b}{a}$ tengsizlik teng kuchli bo'ladilar va shuning uchun $\{\omega : a\xi + b \leq x\}$ va $\left\{\omega : \xi \geq \frac{x-b}{a}\right\}$ hodisalar teng bo'ladilar.

(2): $\left\{\omega : \xi \geq \frac{x-b}{a}\right\} = \left\{\omega : \xi < \frac{x-b}{a}\right\}$ va $F_{\xi}(x)$ taqsimot funksiyasi o'ngdan uzluksiz funksiya bo'lgani uchun qattiy tengsizlikni noqat'iy tengsizlik bilan almashtirish mumkin.

²⁵ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Endi zichlik funksiyasining ta'rifiga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p_{a\xi+b}(x) = F'_{a\xi+b}(x) = \left(1 - F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)' = -\frac{1}{a}F'_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Chunki $a < 0$ da $|a| = -a$ bo'ladi. (7) formula to'la isbot bo'ldi.

Endi biz (3) tenglikni quyidagi teorema asoslanib isbot qilamiz:

2-Teorema²⁶ Agar a va b lar o'zgarmas son ($a \neq 0$) bo'lib, $p_{\xi}(x)$ - zichlik funksiyasi bo'lsa u holda:

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)p_{\xi}(x)dx \quad (10)$$

Isboti:

$p_{a\xi+b}(x)$ - deb $a\xi + b$ ning zichlik funksiyasini belgilaymiz.

1) $a > 0$. U holda uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik qutilishi ta'rifiga ko'ra

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{a\xi+b}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{a} p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (at + b) \frac{1}{a} p_{\xi}(t)adt = \int_{-\infty}^{\infty} (at + b)p_{\xi}(t)dt$$

(1): Teorema 1 ga ko'ra $a > 0$ da $p_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{a}p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$

(2): $t = \frac{x-b}{a}$ ko'rinishda o'zgaruvchilarni almashtirishni bajarsak, u holda $dx = adt$ va

$x = at + b$ bo'ladi. $a > 0$ bo'lgani uchun $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-b}{a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} t = +\infty$ (integrallashning yangi yuqori chegarasi), va $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-b}{a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} t = -\infty$, (integrallashning yangi quyi chegarasi)

Agar $a < 0$ bo'lsa, hisoblashda juda katta bo'lmagan o'zgarish bo'ladi:

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{a\xi+b}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{-1}{a} p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx =$$

²⁶ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (at + b) \frac{-1}{a} p_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (at + b) p_{\xi}(t) dt$$

(1): Teorema 1 ga ko'ra $a < 0$ da $p_{a\xi+b}(x) = \frac{-1}{a} p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Shunday qilib (10) formula to'liq isbot bo'ldi.

(2): $t = \frac{x-b}{a}$ ko'rinishda o'zgaruvchilarni almashtiramiz, u holda $dx = a dt$, $x = at + b$

bo'ladi va $a < 0$ bo'lgani uchun $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-b}{a} = -\infty$ (integrallashning yangi yuqori chegarasi)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-b}{a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} t = +\infty$, (integrallashning yangi quyi chegarasi)

(3) Integrallash chegaralarining o'rnini almashtiramiz.

Bu teoremadan, integralning chiziqliligidan va o'tgan temadagi teorema 2 dan (3) formula to'la isbot bo'ladi.

Ya'ni: $M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (at + b) p_{\xi}(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = aM\xi + b$

Endi tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash formulasini chiqaramiz.

3-Teorema Agar $p_{\xi}(x)$ - zichlik funksiya bo'lib, $m = M\xi$ bo'lsa, u holda²⁷:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 p_{\xi}(x) dx \quad (11)$$

Isboti:

Avvalo $(\xi - m)^2$ - tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_{(\xi-m)^2}(x)$ - ni topamiz:

$(\xi - m)^2 \geq 0$ bo'lgani uchun, $x \leq 0$ larda $\{\omega : (\xi - m)^2 < x\} = \emptyset$ va shuning uchun:

$$F_{(\xi-m)^2}(x) = P\{\omega : (\xi - m)^2 < x\} = P(\emptyset) = 0$$

$x > 0$ da

$$\begin{aligned} F_{(\xi-m)^2}(x) &= P\{(\xi - m)^2 < x\} = P(m - \sqrt{x} < \xi < m + \sqrt{x}) = \\ &= F_{\xi}(m + \sqrt{x}) - F_{\xi}(m - \sqrt{x}) \end{aligned}$$

²⁷ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$p_{(\xi-m)^2}(x)$ deb $(\xi - m)^2$ - tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini belgilasak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} p_{(\xi-m)^2}(x) &= F'_{(\xi-m)^2}(x) = F'_\xi(m + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - F'_\xi(m - \sqrt{x}) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} (p_\xi(m + \sqrt{x}) + p_\xi(m - \sqrt{x})) \end{aligned}$$

Shunday qilib:

$$p_{(\xi-m)^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ da} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} (p_\xi(m + \sqrt{x}) + p_\xi(m - \sqrt{x})), & x > 0 \text{ da} \end{cases}$$

Endi ξ - tasodifiy miqdorning dispersiyasini ta'rifga asosan hisoblash mumkin

$$\begin{aligned} D\xi &= M(x - \xi)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{(\xi-m)^2}(x) dx = \int_{-\infty}^0 x p_{(\xi-m)^2}(x) dx + \int_0^{+\infty} x p_{(\xi-m)^2}(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} x \frac{1}{2\sqrt{x}} (p_\xi(m + \sqrt{x}) + p_\xi(m - \sqrt{x})) dx = \int_0^{\infty} x p_\xi(m + \sqrt{x}) \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \\ &\int_0^{\infty} x p_\xi(m - \sqrt{x}) \frac{dx}{2\sqrt{x}} \stackrel{(2)}{=} \int_m^{\infty} (y - m)^2 p_\xi(y) dy - \int_m^{-\infty} (z - m)^2 p_\xi(z) dz = \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_m^{\infty} (x - m)^2 p_\xi(x) dx + \int_{-\infty}^m (x - m)^2 p_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p_\xi(x) dx \end{aligned}$$

(1): $x \leq 0$ lar uchun $p_{(\xi-m)^2}(x) = 0$ bo'lganidan

$$\int_{-\infty}^0 p_{(\xi-m)^2}(x) dx = 0$$

(2): Birinchi integralda $y = m + \sqrt{x}$ almashtirish bajarsak $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ va $\lim_{x \rightarrow +\infty} (m + \sqrt{x}) = +\infty$

bo'ladi (integrallashning yangi yuqori chegarasi), ikkinchi integralda $z = m - \sqrt{x}$ almashtirish bajarsak $dz = -\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ va $\lim_{x \rightarrow +\infty} (m - \sqrt{x}) = -\infty$ bo'ladi (integrallashning yangi quyi chegarasi).

(3): Integrallash o'zgaruvchisini yana x deb belgilaymiz (Integrallashning o'zgaruvchiga nisbatan invariantligi uchun integral qiymati o'zgarmaydi), ikkinchi integralda esa integrallash tartibini o'zgartiramiz. Shunday qilib (11) formula isbot bo'ldi.

Misol:

ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} h, & -2 \leq x \leq 3 \text{ da} \\ 0, & x < -2 \text{ va } x > 3 \text{ da} \end{cases}$$

h , M_{ξ} , D_{ξ} , $P(1 < \xi < 5)$ va $F_{\xi}(x)$ larni toping:

$$1) 1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} p_{\xi}(x) dx + \int_{-2}^3 p_{\xi}(x) dx + \int_3^{\infty} p_{\xi}(x) dx = 5h$$

$$2) M_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx = \int_{-2}^3 x p_{\xi}(x) dx = 0,2 \int_{-2}^3 x dx = 0,1 \cdot x^2 \Big|_{-2}^3 = 0,5$$

$$3) D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - 0,5)^2 p_{\xi}(x) dx = \int_{-2}^3 (x - 0,5)^2 p_{\xi}(x) dx = \int_{-2}^3 (x - 0,5)^2 \cdot 0,2 dx = \\ = \frac{0,2}{3} (x - 0,5)^3 \Big|_{-2}^3 = \frac{6,25}{3} \approx 2,1$$

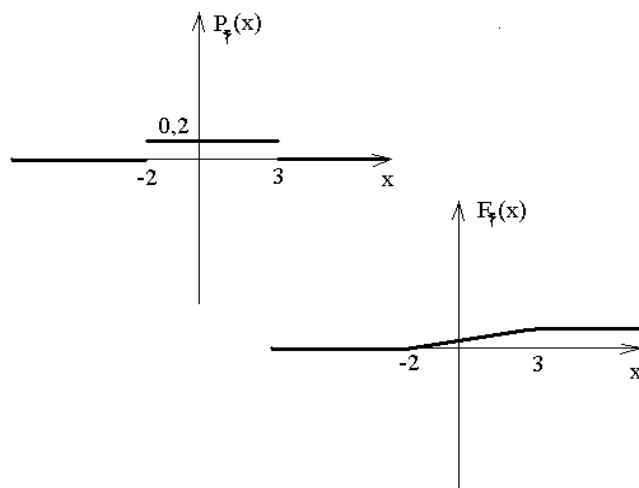
$$4) P(1 < \xi < 5) = \int_1^5 p_{\xi}(x) dx = \int_1^3 p_{\xi}(x) dx + \int_3^5 p_{\xi}(x) dx = \int_1^3 0,2 dx = 0,4$$

$$5) \text{ Agar } x < -2 \text{ bo'lsa } F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = 0$$

$$\text{Agar } x > 3 \text{ bo'lsa } F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^{-2} p_{\xi}(t) dt + \int_{-2}^3 p_{\xi}(t) dt + \int_3^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-2}^3 0,2 dt = 1$$

chunki $x < -2$ da va $x > 3$ da $p_{\xi}(x) = 0$.

Agar $-2 \leq x \leq 3$ bo'lsa



1-chizma

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^{-2} p_{\xi}(t) dt + \int_{-2}^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-2}^x 0,2 dt = 0,2(x + 2)$$

Shunday qilib

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \quad \text{да} \\ 0,2(x + 2), & -2 \leq x \leq 3 \quad \text{да} \\ 1, & x \geq 3 \quad \text{да} \end{cases}$$

6.3 Boshlang'ich va markaziy momentlar.

X-tasodifiy miqdorning **k-tartibli boshlang'ich momenti**²⁸ deb, X^k tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi, ya'ni $\mu_k = M X^k$.

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula $\mu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i$ ko'rinishda bo'lib, uzluksiz tasodifiy miqdor uchun esa

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x) dx$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bizga X-tasodifiy miqdor berilgan bo'lsa unga mos **markaziy tasodifiy miqdor**²⁹ $\bar{X}^0$ deb, X-tasodifiy miqdorning o'zining matematik kutilmasidan chetlanishiga aytiladi, ya'ni

$$\bar{X}^0 = X - \mu_1.$$

²⁸ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

²⁹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

X-tasodifiy miqdorning k-tartibli markaziy momenti deb markaziy $\bar{X}^0$ tasodifiy miqdorning

k-tartibli boshlang'ich momentiga aytiladi, ya'ni $\eta_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k \varphi(x) dx$

ko'rinishda bo'ladi. $\eta_1 = 0, \eta_2 = D(X)$.

Bulardan tashqari tasodifiy miqdorlarning quyidagi ikki sonli xarakteristikalarini ko'rish mumkin. Mediana Me deb tasodifiy miqdorning shunday qiymatiga aytamizki, bunda

$$P(X < Me) - P(X > Me) = 0,5$$

bo'ladi. Demak tasodifiy tajribada X-tasodifiy miqdor bir xil ehtimol bilan yoki Me dan katta bo'ladi, yoki Me dan kichik bo'ladi. Bu xarakteristika tasodifiy miqdorning qiymatlari sonlar o'qida qanday joylashganligini xarakterlaydi. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ξ uchun $Me = M\xi$. Mediana noparametrik statistikada muhim rol o'ynaydi.

Moda deb diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun tasodifiy miqdorning eng katta ehtimolga ega bo'lgan qiymatiga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun moda tasodifiy miqdorning zichlik funksiya maksimum qiymatga erishadigan qiymatiga teng.

Zichlik funksiyasi bitta maksimumga ega bo'lgan taqsimotlar unimodal taqsimotlar, bir necha maksimumga ega bo'lgan taqsimotlar **polimodal taqsimotlar**³⁰ deyiladi. Moda ham matematik kutilma va mediana kabi tasodifiy miqdorning sonlar o'qidagi joylanishini xarakterlovchi sonli xarakteristikadir. Simmetrik, unimodal taqsimotlar uchun bu uchala xarakteristika bir xildir. Normal taqsimot uchun moda bilan matematik kutilma teng bo'ladi.

Nazorat savollari:

1. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi qanday topiladi?
2. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi qanday topiladi?
3. Matematik kutilmaning xossalarini keltiring.
4. Dispersiyaning xossalarini keltiring.
5. Tasodifiy miqdorning boshlang'ich momenti qanday topiladi?
6. Tasodifiy miqdorning markazlashgan momenti qanday topiladi?

³⁰ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

7-MA'RUZA AMALIYOTDA KO'P QO'LLANILADIGAN DISKRET VA UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR. BINOMIAL, PUASSON, GIPERGEOMETRIK TAQSIMOTLAR. TEKIS TAQSIMOT, KO'RSATKICHLI VA NORMAL TAQSIMLANGAN TASODIFIY MIQDORLAR

REJA:

7.1 Binomial taqsimot.

7.2 Puasson taqsimot.

7.3 Tekis taqsimot.

7.4 Ko'satkichli taqsimot.

7.5 Normal taqsimot.

7.6 χ^2 -taqsimot.

7.7 St'yudent taqsimoti.

7.8 Fisher taqsimoti.

7.1 Binomial taqsimot.

Agar ξ - tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, n$ qiymatlarni $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ehtimol bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor **binomial** qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi³¹:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ \sum_{k < x} C_n^k p^k q^{n-k} \text{ agar } & 0 \leq x \leq n \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } n < x \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Asosiy sonli xarakteristikalar: $M\xi = np$, $D\xi = npq$, $\sigma(\xi) = \sqrt{npq}$.

7.2 Puasson taqsimot

Agar ξ - tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$ ehtimollar bilan qabul qilsa, uni **Puasson** qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } k < 0 \text{ bo'lsa,} \\ \sum_{k < x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{agar } 0 \leq k \leq x \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

³¹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Asosiy sonli xarakteristikalar: $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$, $\sigma(\xi) = \sqrt{\lambda}$

7.3 Tekis taqsimot

Agar ξ - tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_N$ qiymatlarni $P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{N}$, $k = 1, 2, \dots, N$

ehtimollar bilan qabul qilsin. Bu tasodifiy miqdor **tekis taqsimlangan** tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi³²:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq x_1 \text{ bo'lsa} \\ \frac{k}{N}, & \text{agar } x_k < x \leq x_{k+1} \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x_N < x \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

7.4 Ko'satkichli taqsimot

α - parametrlil **eksponensial** qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik

funktsiyasi $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha \cdot e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Ko'rinishga, taqsimot funksiyasi esa $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Asosiy sonli xarakteristikalar: $M\xi = \frac{1}{\lambda}$, $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$.

7.5 Normal taqsimot.

Ta'rif: ξ - uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lsa, u Gaussning **normal** qonuni bo'yicha taqsimlangan deb ataladi³³.

$p_\xi(x)$ funksiyaning musbatligi va juftligi ravshan. $x \rightarrow \pm\infty$ da $p_\xi(x) \rightarrow 0$ ligini oddiygina

ko'rsatish mumkin. $x=a$ nuqtada funksiya yagona $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ga teng bo'lgan yagona

maksimumga ega. Funksiyaning grafigi $x = \sigma + a$ va $x = -\sigma + a$ da burilish nuqtalariga ega ekanligini ikkinchi hosila yordamida aniqlash mumkin. Odatda $a=0$ va $\sigma = 1$ bo'lgan hol

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2)$$

³² Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

³³ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

ko'p qaraladi. Bu holda $\varphi(x)$ funksiya markazlashtirilgan va normallangan $\frac{(\xi - a)}{\sigma}$ - tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyaning qiymatlari jadvallari tuzilgan. Bu funksiya yordamida ξ - normal taqsimotli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha ifodalanadi³⁴:

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) \quad (3)$$

Puasson integralini biz matematik analiz kursida ko'rgan edik, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Bundan foydalanib quyidagini ko'rsatish oson.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad (4)$$

Bizga yana quyidagi ikki integralning qiymatlari kerak bo'ladi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = 0 \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx = 1 \quad (6)$$

Isboti:

(5) tenglik integral ostidagi funksiyaning toqligi va integrallash chegarasining 0 ga nisbatan simmetrikligidan osongina kelib chiqadi. (6) tenglikni hosil qilish uchun bo'laklab integrallash usulidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \end{aligned}$$

Endi (1) zichlik funksiyaga ega bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ξ - ning matematik kutilmasi

³⁴ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$$M\xi = a \quad (7)$$

va dispersiyasi

$$D\xi = \sigma^2 \quad (8)$$

ekanligini ko'rsatamiz. Matematik kutilmaning ta'rifidan

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + a) \varphi(t) dt = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t \varphi(t) dt + a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \stackrel{(2)}{=} a$$

(1): $t = \frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajaramiz, bunda $dt = \frac{dx}{\sigma}$ bo'ladi.

(2): (4) va (5) tengliklardan.

(7) tenglik isbot bo'ldi. (8) ni isbot qilish uchun dispersiyani hisoblashning quyidagi formulasidan foydalanamiz:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p_{\xi}(x) dx$$

$m = M\xi = a$ bo'lgani uchun,

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dx \stackrel{(1)}{=} \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt \stackrel{(2)}{=} \sigma^2$$

(1): $t = \frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajaramiz, bunda $dt = \frac{dx}{\sigma}$ bo'ladi.

(2): (6) formulaga asosan.

Endi normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi funksiyadan foydalanamiz:

$$F_0(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$$

Bundan esa zichlik funksiyasi $p_{\xi}(x)$ bo'lgan ξ - normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi munosabat orqali topiladi. $F_{\xi}(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. $F_0(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvali tuzilgan.

$F_0(x)$ funksiyaning quyidagi xossalari isbotlaymiz³⁵:

$$F_0(-x) = -F_0(x) \quad (9)$$

³⁵ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_0(x) = \frac{1}{2} \quad (10)$$

Avval (9) tenglikni isbotlaymiz:

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t) dt = - \int_0^x \varphi(-z) dz = - \int_0^x \varphi(z) dz = -F_0(x)$$

(1): $z = -t$ almashtirish bajaramiz, bunda $-dz = dt$ bo'ladi.

(2) $\varphi(z)$ funksiyaning juftligidan.

Endi (10) tenglikni isbot qilamiz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \varphi(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{2}$$

ξ - normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning (α, β) intervalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = F_0(\beta) - F_0(\alpha)$$

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha biror musbat sondan kichikligi ehtimolligini hisoblash uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P(|\xi - a| < \delta) = 2F_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \quad \delta > 0 \quad (11)$$

Xususan $a=0$ bo'lganda $P(|\xi| < \delta) = 2F_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ tenglik o'rinli.

Agar (11) tenglikda $\delta = \sigma \cdot t$ deb olsak $P(|\xi - a| < \sigma \cdot t) = 2F_0(t)$ ni hosil qilamiz. Xususan $t=3$ bo'lganda

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2F_0(3) = 0,9973$$

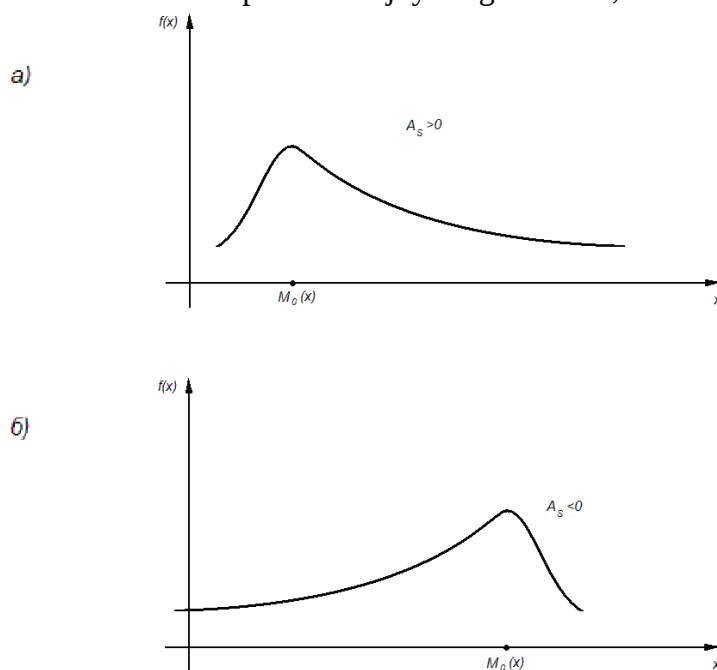
ga egamiz. Bu tasdiq "**uch sigma**" qoidasi deb ataladi.

Asimmetriya va ekstsess. Normal taqsimotdan o'zga taqsimotlarni o'rganishda ularning normal taqsimotdan farqini sonli baholash masalasi kelib chiqadi. Shu maqsadda maxsus sonli xarakteristikalar kiritiladi. Shulardan, xususan asimmetriyava ekstsess tushunchasini ko'rib chiqaylik. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun bu xarakteristikalar nolga teng. Shu sababli o'rganilayotgan taqsimot uchun bu xarakteristikalarining sonli qiymatlari etarlicha nolga yaqin bo'lsa, bu taqsimotning normal taqsimotga yaqinligi xaqida gapirish mumkin. Aksincha, asimmetriya va ekstsesslarning katta qiymatlari bu taqsimotning normal taqsimotdan katta farqlanganligini bildiradi.

Asimmetriyaning baholanishini ko'rib chiqaylik. Simmetrik taqsimot uchun (bunday taqsimotning grafigi $x = M(X)$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetrik) xar bir toq tartibli

markaziy momenti nolga teng. Shuning uchun bu toq tartibli ixtiyoriy (birinchi tartibli momentidan boshqa, chunki ixtiyoriy taqsimotning birinchi tartibli markaziy momenti nolga teng) momentlar asimmetriyani baholash uchun xizmat qiladi. Tabiiyki ularning eng soddasi η_3 -uchinchi tartibli markaziy momenti tanlanadi. Lekin bu η_3 -moment tasodifiy miqdor o'lchanayotgan o'lchov birligidan bog'liq bo'lganligi sababli uni $\sigma^3 = \sqrt{D(X)}^3$ ga bo'lib, birlik o'lchovsiz xarakteristikaga o'tib olinadi. Shunday qilib nazariy taqsimotning **asimmetriyasi** deb markaziy uchinchi tartibli momentning o'rtacha kvadratik chetlanish kubiga nisbatiga aytiladi: $A_3 = \frac{\eta_3}{\sigma^3}$.

Agar taqsimot egri chizig'ining uzun qismi, matematik kutilmadan o'ng tomonda joylashgan bo'lsa, asimmetriya musbat (2 rasm,a) va agar taqsimot egri chizigining uzun qismi matematik kutilmadan chap tomonda joylashgan bo'lsa, asimmetriya manfiy bo'ladi. (2



rasm,b).

2-chizma

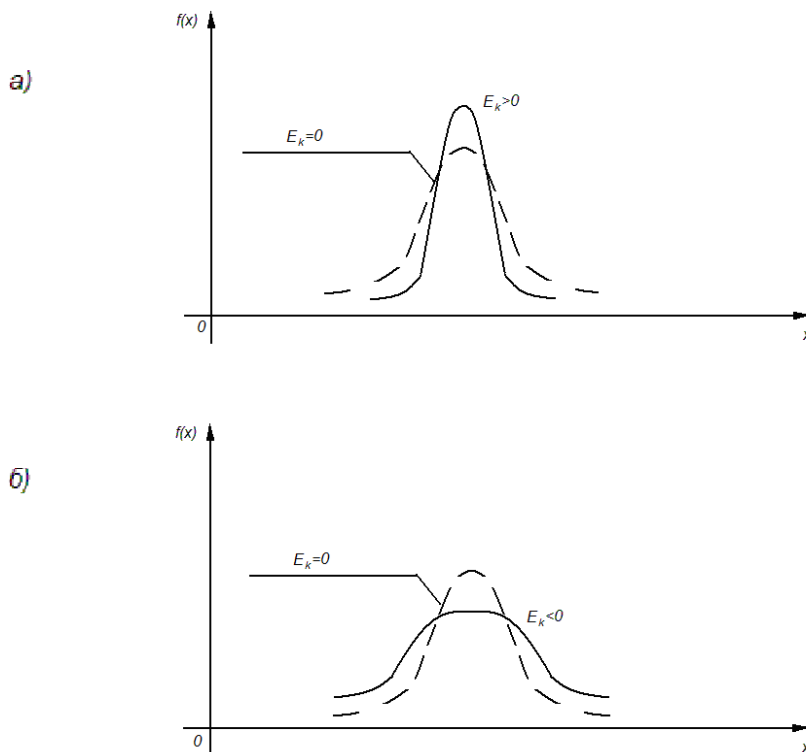
Nazariy taqsimot egri chizig'ining maksimumi normal taqsimot egri chizig'ining maksimumidan pastroqda yoki yuqoriroqda joylashganligini ya'ni taqsimot egri chizig'ining “**qiyaligini**” baholash uchun ekstsess deb ataluvchi sonli xarakteristikadan foydalaniladi³⁶.

Ekstses quyidagi tenglik bilan aniqlanadi: $E_4 = \frac{\eta_4}{\sigma^4} - 3$.

Normal taqsimot uchun $\frac{\eta_4}{\sigma^4} = 3$ bo'lganligi sababli $E_4 = 0$. Shu sababli, agar biror taqsimot uchun ekstsess noldan farqli bo'lsa uning zichlik funksiyasining grafigi normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigidan farqli bo'ladi: agar ekstsess musbat bo'lsa, unda uning zichlik

³⁶ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

funksiyasining grafigi maksimum nuqtada normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigidan balandroq bo‘ladi (3 rasm,a) . Agar ekstess manfiy bo‘lsa unda solishtirilayotgan taqsimot zichlik funksiyasi grafigi maksimum nuqtada normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigidan pastroq, ya’ni “yassi”roq bo‘ladi (3 rasm b). Lekin bunda shu narsa ko‘zda tutiladiki normal taqsimot xam, solishtirilayotgan taqsimot xam bir xil matematik kutilmaga ega.



3-chizma

7.6 χ^2 -taqsimot.

ξ -tasodifiy miqdor n-ozodlik darajasiga ega bo‘lgan χ^2 -taqsimot qonuniga ega deyiladi³⁷ agarda uning zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lsa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Bu erda $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ gamma funksiya bo‘lib, xususan $\Gamma(n+1) = n!$. Bu tasodifiy miqdorning momentlari quyidagicha aniqlanadi: $M\xi^k = n(n+1) \dots [n+2(k-1)]$, $D\xi = 2n$, $\eta_3 = 8n$, $\eta_4 = 48n + 12n^2$,

³⁷ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O‘qituvchi, 2001.

Asimmetriya koeffitsienti $A_3 = \sqrt{\frac{8}{n}}$, ekstsess koeffitsienti $E_3 = \frac{12}{n}$.

1. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan va $(0,1)$ parametrli normal qonunga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U xolda $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ tasodifiy miqdor n -ozodlik darajali χ^2 -taqsimot qonuniga ega bo'ladi. Statistikada nazariy taqsimot funksiyasi $F(x)$ bilan tajriba natijalari orasidagi muvofiqlikni tekshirish kriteriyasi Pirsonning χ^2 -statistikasini o'rganishga asoslangan. χ^2 -statistika quyidagicha aniqlanadi: $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i - np_i}{np_i}$. Bu yerda $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$, $x_0 = -\infty < x_1 < \dots < x_k = \infty$ $(-\infty; +\infty)$ intervalning ixtiyoriy bo'linishi, $n_i - [x_{i-1}, x_i)$ intervalga tushgan kuzatmalar soni. Qo'yilgan gipoteza to'g'ri deb faraz qilinganda χ^2 -statistika $n \rightarrow \infty$ da $k-1$ ozodlik darajasiga ega bo'lgan χ^2 -taqsimot qonuniga ega bo'ladi va bu χ^2 -taqsimot $F(x)$ taqsimot funksiyasidan bog'liq bo'lmaydi.

7.7 St'yudent taqsimoti

ξ -tasodifiy miqdor α -ozodlik darajali St'yudent taqsimotiga ega deyiladi³⁸, agar uning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\alpha\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Bunday tasodifiy miqdorlarning momentlari quyidagicha topiladi:

$$M\xi^{2k-1} = 0 \quad M\xi^{2k} = \frac{\alpha^k \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - k\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad 2k < \alpha,$$

$$D\xi = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-2}, & \alpha > 2 \\ \infty, & \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Agar η va ζ - o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, va ζ - n -ozodlik darajali χ^2 -taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lib, η -standart normal qonun bilan

³⁸ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

taqsimlangan bo'lsa, u xolda $\xi = \eta \sqrt{\frac{T}{\varsigma}}$ n-ozodlik darajali St'yudent taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'ladi. Bu taqsimotning statistikadagi tatbiqlarida ko'p xollarda α -natural son bo'ladi. St'yudent taqsimoti statistikada normal taqsimlangan boshto'plam o'rta qiymatiga qo'yilgan gipotezalarni tekshirishda dispersiya noma'lum bo'lganda ishlatiladi. α -ning etarlicha katta qiymatlarida St'yudent taqsimoti standart normal taqsimotga asimptotik yaqinlashib boradi.

7.8 Fisher taqsimoti

Agar ξ va η bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular k_1 va k_2 ozodlik darajali χ^2 qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, u holda $F = \frac{\xi/k_1}{\eta/k_2}$ tasodifiy miqdor F taqsimotga (yoki k_1 va k_2 ozodlik darajali Fisher taqsimotiga) ega deyiladi. F taqsimotning zichligi:

$$P_{k_1, k_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C_0 \frac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_1x + k_2)^{(k_1+k_2)/2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Bu yerda $x > 0$ da

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2) \Gamma(k_2/2)}.$$

Nazorat savollari:

1. Binomial taqsimoti qanday ifodalanadi?
2. Puasson taqsimoti qanday ifodalanadi?
3. Tekis taqsimoti qanday ifodalanadi?
4. Normal taqsimoti qanday ifodalanadi?
5. Normal taqsimotning assimetriya koeffitsienti nimaga teng?
6. Normal taqsimotning ekstsess koeffitsienti nimaga teng?
7. χ^2 taqsimoti i qanday ifodalanadi?
8. Fisher taqsimoti qanday ifodalanadi?
9. St'yudent taqsimoti qanday ifodalanadi?

8-MA'RUZA KO'P O'LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR VA ULARNING TAQSIMOT QONUNLARI. IKKI DISKRET TASODIFIY MIQDORLAR SISTEMASI. TAQSIMOT MATRITSASI. TO'G'RI TO'RTBURCHAKDA TEKIS TAQSIMLANGAN VA TEKISLIKDA NORMAL TAQSIMLANGAN TASODIFIY MIQDORLAR. KORRELYATSIYA MOMENTI VA KORRELYATSIYA KOEFFITSIENTI

REJA:

8.1 Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor

8.2 Bir tasodifiy argumentning funksiyasi

8.3 Ikki tasodifiy argumentning funksiyasi

8.1 Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, mumkin bo'lgan qiymatlari (x, y) sonlar jufti bo'lgan (ξ, η) - ikki tasodifiy miqdor sistemasiga aytiladi. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari diskret bo'lgan miqdorga aytiladi. Uzluksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari uzluksiz bo'lgan miqdorga aytiladi. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni deb, mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, bu miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari $P_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ ro'yxatiga aytiladi. Taqsimot qonuni odatda jadval shaklida beriladi.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	...	p_{n2}
...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	p_{3m}	...	p_{nm}

Uzluksiz ikki o'lchovli (ξ, η) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi³⁹ deb, $F_{\xi\eta} = P(\xi < x, \eta < y)$ ehtimolga aytiladi.

$F_{\xi\eta}(x, y)$ - taqsimot funksiyasining asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

1) $0 \leq F_{\xi\eta}(x, y) \leq 1$

³⁹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

2) $F_{\xi\eta}(x_2, y) \geq F_{\xi\eta}(x_1, y)$, agar $x_2 > x_1$ bo'lsa, $F_{\xi\eta}(x, y_2) \geq F_{\xi\eta}(x, y_1)$, agar $y_2 > y_1$ bo'lsa.

3) Ushbu tengliklar o'rinli:

$$F_{\xi\eta}(-\infty, y) = 0, F_{\xi\eta}(y, -\infty) = 0, F_{\xi\eta}(-\infty, -\infty) = 0$$

$$4) F_{\xi\eta}(\infty, \infty) = 1$$

$$5) F_{\xi\eta}(x, +\infty) = F_1(x), \quad F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_2(y)$$

Bu yerda $F_1(x)$ ikki o'lchovli tasodifiy miqdor (ξ, η) - ning ξ tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasi, $F_2(y)$ esa η tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasi.

$$6) P(a < \xi < b, c < \eta < d) = F_{\xi\eta}(b, d) - F_{\xi\eta}(a, d) - F_{\xi\eta}(b, c) + F_{\xi\eta}(a, c).$$

Uzlusiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining **zichlik funksiyasi** deb⁴⁰, taqsimot funksiyadan olingan ikkinchi tartibli aralash hosilaga aytiladi:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \partial y};$$

Zichlik funksiyani bilgan holda taqsimot funksiyani

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p_{\xi\eta}(x, y) dx dy;$$

formula bo'yicha topish mumkin. (ξ, η) tasodifiy nuqtaning D sohaga tushish ehtimoli

$$P[(\xi, \eta) \in D] = \iint_D p_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad \text{tenglik bilan aniqlanadi.}$$

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

$$1) p_{\xi\eta}(x, y) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1$$

(ξ, η) - ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning koovariatsiyasi deb quyidagi songa aytiladi:

$$\mu_{\xi\eta}(x, y) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta))$$

ξ va η miqdorlarning korrelyatsiya koeffisienti deb koovariatsiyaning bu miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanishlari ko'paytmasiga nisbatiga aytiladi:

⁴⁰ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}};$$

Agar $\mu_{\xi\eta} \neq 0$ bo'lsa, bu miqdorlar **korrelyatsiyalangan** deyiladi. Agar $\mu_{\xi\eta} = 0$ bo'lsa, bu miqdorlar **korrelyatsiyalanmagan** deyiladi⁴¹.

Ikkita korrelyatsiyalangan miqdor, shuningdek, bog'liq hamdir; agar ikkita miqdor bog'liq bo'lsa ularning korrelyatsiyalangan bo'lishi shart emas.

Ikkita miqdorning erkliligidan ularning korrelyatsiyalanmaganligi kelib chiqadi, lekin bu miqdorlarning korrelyatsiyalanmaganligidan ularning erkliligi haqida xulosa chiqarish mumkin emas. (Normal taqsimlangan miqdorlar bundan mustasno).

8.2 Bir tasodifiy argumentning funksiyasi.

Agar ξ tasodifiy argumentning har bir mumkin bo'lgan qiymatiga η tasodifiy argumentning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda η ni ξ tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va bunday yoziladi: $\eta = \varphi(\xi)$. Agar ξ diskret tasodifiy miqdor va $\eta = \varphi(\xi)$ funksiya monoton bo'lsa, u holda ξ ning turli qiymatlariga η ning turli qiymatlari mos keladi, shu bilan birga ξ va η ning mos qiymatlarining ehtimollari bir xil bo'ladi. Boshqacha aytganda, η ning mumkin bo'lgan qiymatlari $\eta_i = \varphi(\xi_i)$ tenglikdan topiladi, ξ_i argument ξ ning mumkin bo'lgan qiymatlari; η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari $P(\eta = \eta_i) = P(\xi = \xi_i)$ tenglikdan topiladi. Agar $\eta = \varphi(\xi)$ monoton funksiya bo'lmasa, u holda, umuman aytganda, ξ ning turli qiymatlariga η ning bir xil qiymatlari mos kelishi mumkin.

Bunday holda η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini topish uchun ξ ning η bir xil qiymat qabul qiladigan qiymalarining ehtimollarini qo'shish lozim.

Agar ξ ushbu $p_{\xi}(x)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdor va $\eta = \varphi(\xi)$ differensiallanuvchi monoton funksiya bo'lib, unga teskari funksiya $\eta = \psi(\xi)$ bo'lsa, u holda η tasodifiy miqdorning $p_{\eta}(y)$ zichlik funksiyasini $p_{\eta}(y) = p_{\xi}[\psi(\eta)] \cdot |\psi'(\eta)|$ tenglikdan topiladi.

Agar $\eta = \varphi(\xi)$ funksiya ξ ning qiymatlari intervalida monoton bo'lmasa, u holda bu intervalni $\varphi(\xi)$ funksiya monoton bo'ladigan intervallarga ajratib, monotonlik intervallarining har biri uchun $p_{\eta_i}(y)$ zichlik funksiyalarini topish, keyin esa $p_{\eta}(y)$ ni $p_{\eta}(y) = \sum p_{\eta_i}(y)$ yig'indi ko'rinishida ifodalash lozim.

⁴¹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

8.3 Ikki tasodifiy argumentning funksiyasi.

Agar ξ va η tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlarining har bir juftiga μ tasodifiy miqdorning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda μ ikkita ξ va η tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va bunday yoziladi: $\mu = \varphi(\xi, \eta)$. Agar ξ va η diskret erkli tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\mu = \xi + \eta$ funksiyani taqsimotini topish uchun μ ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini topish lozim, buning uchun ξ ning mumkin bo'lgan har bir qiymatini η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining hammasi bilan qo'shib chiqish lozim. μ ning ehtimoli quyidagi tenglikdan topiladi.

$$P(\mu = \mu_i) = P(\xi + \eta = \xi_i + \eta_i) = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i)$$

Huddi shuningdek $\mu = \xi \cdot \eta$ funksiyani ham taqsimoti topiladi. Bunda $\mu_i = \xi_i \cdot \eta_i$ lar μ ning mumkin bo'lgan har bir qiymati va μ ning ehtimoli quyidagi tenglikdan topiladi

$$P(\mu = \mu_i) = P(\xi \cdot \eta = \xi_i \cdot \eta_i) = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i)$$

Nazorat savollari:

1. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb qanday tasodifiy miqdorga aytiladi?
2. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi nima?
3. Ikki o'lchovli taqsimot funksiya qanday xossalarga ega?
4. Koovariatsiya koefitsienti qanday ifodalanadi?
5. Korrelyatsiya koefitsienti nimaga teng?

9-MA'RUZA KATTA SONLAR QONUNI. CHEBISHEV VA BERNULLI TEOREMALARI. LYUPUNOVNING MARKAZIY LIMIT TEOREMALARI

REJA:

9.1 Katta sonlar qonuni

9.2 Chebishev tengsizligi

9.3 Markaziy limit teoremasi

9.1 Katta sonlar qonuni

Extimollik nazariyasida «katta sonlar qonuni»⁴² deyilganda tor ma'noda bir qator matematik teoremlar tushuniladi va ularning har birida katta sondagi tajribalar o'rtacha xarakteristikalarining u yoki bu shartlarda biror ma'lum o'zgarma miqdorlarga yaqinlashish fakti belgilanadi. Katta sonlar qonuni ehtimollik nazariyasining amaliyotga tatbiqlari uchun nazariy asos bo'ladi.

Bernuli teoremasi: S - tajribada A hodisa $p = P(A)$ ehtimol bilan ro'y beradi. Tajriba o'zaro bog'liq bo'lmagan holda n-marta takrorlanganda A hodisa m marta ro'y bersin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Bu teoremdan ko'rinib turibdiki, A hodisaning ro'y berishi chastotasi $\frac{m}{n}$ - bizga katta n larda A hodisaning ro'y berish ehtimolini berar ekan.

9.2 Chebishev tengsizligi.

Chebishev teoremasi: Chekli dispersiyaga ega bo'lgan istalgan ξ tasodifiy miqdor uchun har bir $\varepsilon > 0$ da

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

9.3 Markaziy limit teoremasi

Markaziy limit teoremlar tasodifiy miqdorlar yig'indilari ketma - ketliklarining qanday shartlarda normal taqsimotga bo'ysunishini aniqlab beruvchi teoremlaridir. Ular bir - birlaridan yig'indini hosil qiluvchi tasodifiy miqdorlar taqsimot qonunlariga qo'yiladigan

⁴² Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

shartlar bilan farq qiladi. Biz markaziy limit teoremaning eng sodda shaklini ta'riflaymiz, u qo'shiluvchilar bir xil taqsimlangan hol uchun to'g'ridir.

Teorema. Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning matematik kutilishi m va dispersiyasi σ^2 bo'lgan bir xil taqsimot qonuniga ega bo'lsa, u holda n cheksiz ortganida

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

-ning taqsimot qonuni matematik kutilishi 0 va dispersiyasi 1 bo'lgan normal taqsimotga yaqinlashadi. Muavr - Laplasning lokal teoremasi bu teoremaning xususiy holi ekanini aytib o'tamiz.

Nazorat savollari:

1. Katta sonlar qonuni qanday ta'riflanadi?
2. Bernulli teoremasini keltiring.
3. Chebishev tengsizligi qanday ifodalanadi?
4. Markaziy limit teoremasi qanday ta'riflanadi?
5. Markaziy limit teoremasi bajarilishi uchun zaruriy shartlar qanday?

10-MA'RUZA MATEMATIK STATISTIKANING ASOSIY MASALALARI. TANLANMA USUL. TANLANMANING STATISTIK VA EMPIRIK FUNKSIYASI. POLIGON VA DIAGRAMMA. TAQSIMOT PARAMETRLARNING STATISTIK BAHOLARI. SILJIMAGAN, EFFEKTIV VA ASOSLI PARAMETRLAR

REJA:

10.1 Tanlanma, variatsion qator.

10.2 Empirik taqsimot funktsiya.

10.3 Poligon va gistogramma.

10.4 Tanlanmaning sonli xarakteristikalar.

10.5 taqsimot parametrlarning statistik baholari.

10.6 Siljimagan parameter.

10.7 Effektiv parameter.

10.8 Asosli parametr.

10.1 Bosh to'plam, tanlanma, variatsion qator

Ehtimollar nazariyasida o'rganilayotgan tasodifiy jarayonning matematik modeli sifatida $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ ehtimollik fazosi qaraladi, bunda Ω - **elementar hodisalar fazosi**⁴³ deb ataluvchi biror to'plam, $\mathfrak{F}$ – Ω elementar hodisalar fazosining to'plam osti to'plamlaridan biror qoidaga ko'ra ajratilgan tasodifiy hodisalar to'plami, P $\mathfrak{F}$ to'plamdagi tasodifiy hodisalar ehtimoli. Xar bir tayin holat uchun P ehtimollik o'lchovi to'la aniqlanadi. Ehtimollar nazariyasining asosiy vazifasi mavjud ehtimollik fazosi qonuniyatlarini ochib berish, xususan murakkab hodisalarning ehtimollarini aniqlashga imkon beruvchi usullarni ishlab chiqishdan iboratdir.

Biroq amaliyotda tayin tajribalarni o'rganishda P ehtimollik ba'zi bir noaniqliklarga ega bo'ladi. Ko'p hollarda aytish mumkinki, P ehtimollik biror ehtimollar sinfining elementi bo'ladi. Bu sinf $\mathfrak{F}$ da berilishi mumkin bo'lgan barcha ehtimolliklarni o'z ichiga oladi. Agar $\mathfrak{F}$ sinf berilgan bo'lsa, u holda ehtimollikning empiric modeli yoki qisqacha **empirik modeli** berilgan deyiladi. Shunday qilib empiric model o'rganilayotgan tajribani ehtimollik modelida ehtimollikni berishda u yoki bu noaniqlik bo'lgandagi holatni yoritadi. Matematik statistikaning vazifasi bu noaniqliklarni kuzatilayotgan tajriba ma'lumotlari asosida kamaytirishdan iborat.

Shunday qilib matematik statistikada barcha mulohazalar empiric ma'lumotlarga, ya'ni kuzatilgan tajriba natijalariga asoslanadi. Ko'p hollarda esa dastlabki empirik

⁴³ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

ma'lumotlar P taqsimotga ega bo'lgan X tasodifiy miqdor ustida o'tqazilgan tajribalar natijasi bo'ladi. Bu holda tajriba tasodifiy miqdor ustida n ta sinov o'tqazishdan iborat bo'lib, i -sinov natijasi X_i tasodifiy miqdor bilan aniqlanadi, $i=1,2,\dots,n$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ – to'plamga tanlanma deyiladi, n - tanlama hajmi. Biz kuzatishlar bir-biriga bog'liqsiz bo'lgan holni qaraymiz. Shu sababli $X_1, X_2, \dots, X_n$ larni n ta bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Tayin o'tqazilgan tajriba natijalari $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanma hisoblanadi, uni $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar orqali belgilaymiz.

Ma'lumki $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning qiymatlar to'plamidan bo'ladi, shu sababli ular variantalar deyiladi. Faraz qilaylik $\mathfrak{R}$ kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning barcha qiymatlar to'plami bo'lsin. $\mathfrak{R}$ bosh to'plam deyiladi, $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarni bosh to'plam $\mathfrak{R}$ dan qaytariladigan tanlashlar sxemasi bo'yicha olingan, hajmi n bo'lgan tanlanma deb qarash mumkin. Tanlanmani o'sib empiric yoki kamayib empiric tartibida yozilishiga variatsion qator deyiladi. Variatsion qatorning uchta turi mavjud: ranjirlangan, diskret, oraliq variatsion qatorlar. Variatsion qatorni ko'pincha **taqsimot qatori**⁴⁴ ham deyiladi. Ranjirlangan qator tanlanma hajmi kichik bolganda bu tanlanmaning alohida qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni o'sish (kamayish) tartibida joylashishidan iboratdir, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq x_{(3)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Agar variantalar soni yetarlicha katta bo'lib, $x_{\min}$ va $x_{\max}$ lar o'rtasidagi farq kichik bo'lsa, ranjirlangan qator juda katta bo'ladi. Agar belgi qiymatlari bir nechta bo'lsa, u holda diskret variatsion qator tuziladi.

Diskret variatsion qator, ikkita qatordan tashkil topgan bo'lib, birinchi qatorda belgining $x_1, x_2, \dots, x_s$ turli variantalari ikkinchi qatorda esa shu variantalarga mos ularning chastotalari n_i yoki nisbiy chastotalari n_i/n joylashgan bo'ladi. Agar tanlanma hajmi katta bo'lib, $x_{\min}$ va $x_{\max}$ o'rtasidagi farq yetarlicha katta bo'lsa, u holda oraliq variatsion qator tuziladi.

Oraliq variatsion qator ikkita qatordan tuzilgan bo'lib, birinchi qatorda o'rganilayotgan belgining oraliqlaridan, ikkinchisi esa bu oraliqlarga tegishli variantalar chastotasi yoki nisbiy chastotalaridan tuzilgan. Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi. Tanlanmaning statistik taqsimotini oraliqlar va ularning chastotalari yordamida ham berish mumkin. Ehtimollar nazariyasida taqsimot deganda tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan bu qiymatlar ehtimollari orasidagi moslik tushuniladi, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar orasidagi moslik tushuniladi.

10.2 Empirik taqsimot funktsiya

Faraz qilaylik diskret variatsion qator berilgan (1-jadval)

1-jadval

⁴⁴ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

x_i	x_1	x_2		x_k
n_i	n_1	n_2		n_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$		$\frac{n_k}{n}$

Bu yerda

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$

$$n(u) = \sum_{i=1}^k n_i * I(x_i < u)$$

u dan kichik variantalar soni bo'lsin, bunda

$$I(x_i < u) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x_i < u \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x_i \geq u \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

boshqa soʻz bilan aytganda, $n(u)$ X tasodifiy miqdor ustida n ta kuzatish oʻtqazilgandagi x hodisaning roʻy berishlari chastotalar soni.

Ta'rif. Tanlamaning **empiric taqsimot funksiyasi**⁴⁵ $F_n(u)$ deb $n(u)/n$ nisbatga aytiladi, ya'ni

$$F_n(u) = \frac{n(u)}{n} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} * I(x_i < u) = \begin{cases} 0, & agar\ x < x_1\ bo'lsa \\ \frac{n_1}{n}, & agar\ x_1 \leq x < x_2\ bo'lsa \\ \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n}, & agar\ x_2 \leq x < x_3\ bo'lsa \\ \\ \frac{n_1}{n} + ... + \frac{n_{k-1}}{n}, & agar\ x_{k-1} \leq x < x_k\ bo'lsa \\ 1, & agar\ x \geq x_k\ bo'lsa \end{cases}$$

Empirik taqsimot funktsiya $F_n(u)$ taqsimot funktsiyaning barcha xossalari qanoatlantiradi. Faraz qilaylik $F(x) = P(X < x)$ kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning noma'lum taqsimot funktsiyasi bo'lsin. Odatda $F(x)$ ni X tasodifiy miqdorning nazariy taqsimot funktsiyasi deyiladi. Shuni aytib o'tish kerakki, tayin tajriba o'tqazilguncha empirik taqsimot funktsiyani

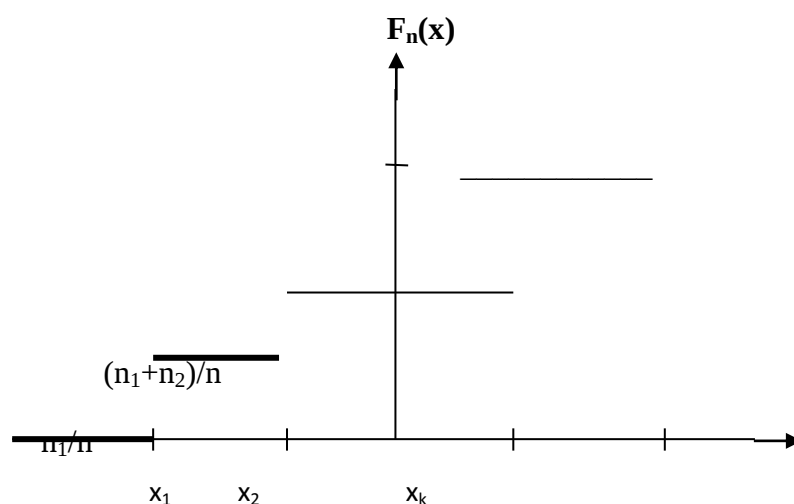
⁴⁵ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

tasodifiy miqdor deb qarash kerak, chunki u $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlamaning funktsiyasi xisoblanadi. Kuchaytirilgan katta sonlar qonunidan Glivenko teoremasi kelib chiqadi.

Glivenko-Kontelli teoremasi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_x |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon) = 1$$

Shunday qilib empiric taqsimot funktsiya $F_n(x)$ “taqriban” $F(x)$ nazariy taqsimot funktsiyaga tengdir. Empirik funktsiya zinapoyasimon funktsiya bo‘lib, $x_1, x_2, \dots, x_k$ nuqtalarda sakrashlarga ega, x_m nuqtadagi sakrash qiymati $\frac{n_m}{n}$ empiric,



1-chizma

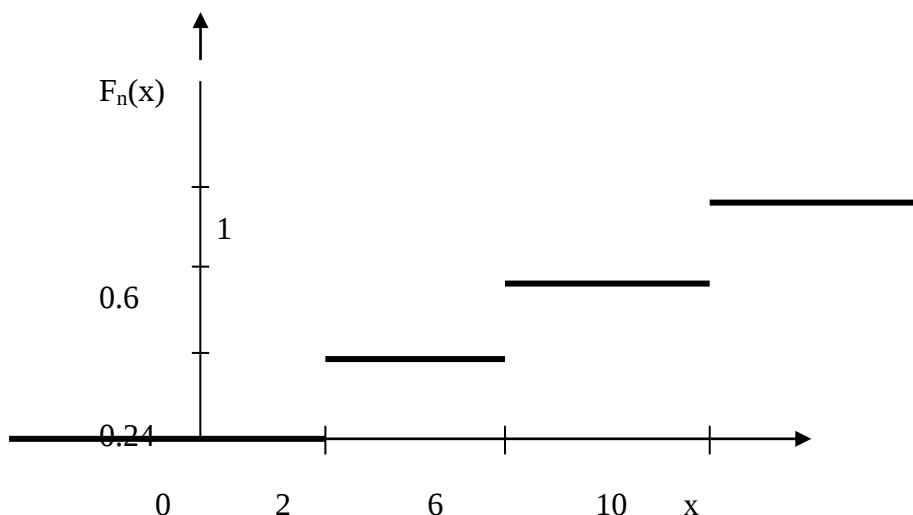
Empirik funktsiya $F_n(x)$ bilan nazariy taqsimot funktsiya $F(x)$ ning farqi shundan iboratki, $F(x)$ ($X < x$) hodisaning ehtimolini, empiric taqsimot funktsiya $F_n(x)$ esa xuddi shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi.

Misol. Tanlanmaning berilgan diskret variatsion qatori bo‘yicha empiric taqsimot funktsiyani yasang.

X_i	2	6	10
n_i	12	18	20

$$n = \sum_{i=1}^3 n_i = 12 + 18 + 20 = 50$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{12}{50}, & 2 \leq x < 6 \\ \frac{30}{50}, & 6 \leq x < 10 \\ 1, & x \geq 10 \end{cases}$$



2-chizma

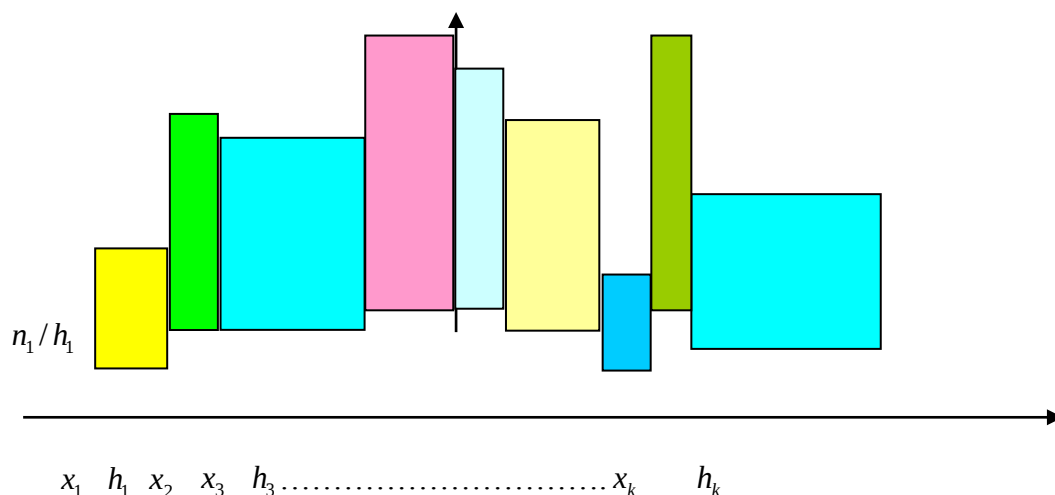
10.3 Poligon va gistogramma

$(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq **chastotalar poligoni** deyiladi. $\left(x_1, \frac{n_1}{n}\right), \left(x_2, \frac{n_2}{n}\right), \dots, \left(x_k, \frac{n_k}{n}\right)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa **nisbiy chastotalar poligoni** deyiladi⁴⁶.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h_i uzunlikdagi guruh oraliqlari, balandliklari esa $\frac{n_i}{h_i}$ nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

$$\frac{n_i}{h_i}$$

⁴⁶ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.



3-chizma

Hosil bo'lgan figuraning yuzasi n empiric. Xususan oraliqlar qadamlari bir xil ham bo'lishi mumkin $h_1 = h_2 = \dots = h_k = h$ Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h_i uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{n * h_i}$ nisbatga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzasi birga teng. Boshqa so'z bilan aytganda nisbiy chastotalar poligoni va gistogrammasi nazariy taqsimot funktsiya $F(x)$ zichlik funktsiyasining empiric bahosi xisoblanadi.

10.4 Tanlanmaning sonli xarakteristikalar

Nazariy taqsimotning sonli xarakteristikalar kabi $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanmaning empiric taqsimot funktsiyasining ham sonli xarakteristikalar kiritiladi. Tanlanma momentlar quyidagicha aniqlanadi:

Ranjirlangan variatsion qator berilgan holda⁴⁷:

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \quad k - \text{tartibli tanlanma moment.}$$

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - A_1)^k \quad k - \text{tartibli markaziy moment.}$$

Ko'p hollarda ishlatiladigan A_1 va M_2 xarakteristikalar aloxida harflar bilan belgilanadi.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \text{tanlanma o'rta qiymat,}$$

⁴⁷ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ - tanlanma dispersiya,}$$

$$\overline{S} = \sqrt{\overline{S}^2} \text{ - tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish.}$$

Agar diskret variatsion qator berilgan bo'lsa tanlanma momentlar quyidagicha hisoblanadi⁴⁸:

$$A_j = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^j * n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \text{ j- tartibli tanlanma moment,}$$

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - A_1)^j * n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \text{ j- tartibli markaziy moment}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i * n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \text{ tanlanma o'rta qiymat}$$

$$\overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 * n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \text{ tanlanma dispersiya}$$

Oraliqli variatsion qatorlarda ham tanlanma momentlar diskret variatsion qatorlar uchun berilgan formulalar orqali topiladi, bunda x_i variantalar sifatida oraliq o'rtalari olinishi mumkin. Diskret va oraliqli variatsion qatorlarda hisoblashni soddalashtirish uchun

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i - c}{k} \right) * n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} * k + c$$

$$\overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i - c}{k} \right)^2 * n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} * k^2 - (\bar{x} - c)^2$$

⁴⁸ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

formulalardan foydalanish mumkin, bunda C - umuman olganda ixtiyoriy son, lekin hisoblashni soddalashtirish uchun eng ko'p qatnashgan x_i ni olgan ma'qul, k - x_i larning o'zgarish qadami.

⁴⁹**Tanlanma modasi M_0 .** Ranjirlangan variatsion qatorlarda M_0 aniqlanmaydi. Diskret variatsion qatorlarda eng katta chastotali varianta M_0 bo'ladi, agar eng katta chastotali varianta ikkita bo'lsa, u holda variatsion qator bimodal qator hisoblanadi va h.k. Agar kuzatishlar oraliqli variatsion qator ko'rinishida berilgan bo'lsa, u holda moda

$$Mo = X_{Mo} + k * \frac{n_{Mo} - n_{Mo+1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})}$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda X_{Mo} -eng ko'p qatnashgan oraliq – moda oralig'ining quyi chegarasi, n_{Mo} - moda oralig'i chastotasi, n_{Mo+1} - moda oralig'idan bitta keyingi oraliq chastotasi, n_{Mo-1} - moda oralig'idan bitta oldingi oraliq chastotasi, k -moda oraliq uzunligi.

Ranjirlangan variatsion qatorlarda Me quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$Me = \begin{cases} x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & \text{agar } n \text{ toq bo'lsa} \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{agar } n \text{ juft bo'lsa} \end{cases}$$

bu yerda n -tanlanma hajmi, $[a]$ - a sonning butun qismi.

⁵⁰**Tanlanma medianasi Me .** Diskret variatsion qator mediana Me yig'ma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan yoki yig'ma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan x_j variantaga aytiladi.

Oraliq variatsion qator uchun Me quyidagicha formula bilan aniqlanadi:

$$Me = X_{Me} + k * \frac{\sum_{i=1}^m n_i - T_{Me-1}}{n_{Me}}$$

Bu yerda X_{Me} oraliqli variatsion qatorda yig'ma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan oraliq yoki yig'ma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan oraliq – mediana oralig'ining boshi, n_{Me} - mediana oralig'ining chastotasi, T_{Me-1} mediana oralig'i chastotasigacha bo'lgan chastotalar yig'indisi, ya'ni $T_{Me-1} = n_1 + n_2 + \dots + n_{Me-1}$, k - mediana oralig'i uzunligi.

⁴⁹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

⁵⁰ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

10.5 taqsimot parametrlarning statistik baholari

Ta'rif. Nazariy taqsimot noma'lum parametrining **statistik bahosi** deb tanlanmadan olingan ixtiyoriy funktsiyaga aytiladi⁵¹.

Statistik baholar baholanayotgan parametrni yaxshi yaqinlashtirib berishi uchun ular ma'lum talablarni qanoatlantirishlari lozim.

Faraz qilaylik $T_n = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazariy taqsimotning noma'lum θ parametri bahosi bo'lsin va hajmi n ga teng bo'lgan tanlanma bo'yicha T_1 baho topilgan bo'lsin. Endi bosh to'plamdan hajmi n ga teng bo'lgan boshqa tanlanma hosil qilamiz va bu tanlanma bo'yicha T_2 bahoni topamiz va hokazo. $T_1, T_2, \dots, T_k$ sonlar bir xil bo'lishi shart emas. Shunday qilib T_n bahoni tasodifiy miqdor deb, $T_1, T_2, \dots, T_k$ sonlarni esa uning mumkin bo'lgan qiymatlari deb qarash mumkin.

Boshqa tomondan, ta'rifdan kelib chiqadiki bitta parametr uchun bir nechta yoki cheksiz ko'p statistik baholar tuzish mumkin. Shu sababli barcha baholar sinfi ichidan «yaxshi» larini ajratish, ya'ni shunday statistika ajratish kerakki, ularning qiymatlari u yoki bu ma'noda noma'lum parametrning haqiqiy qiymati atrofida joylashgan bo'lsin.

10.6 Siljimagan parametr

Ta'rif. **Siljimagan baho** deb, tanlanma hajmi n ixtiyoriy bo'lganda ham matematik kutilishi baholanayotgan θ parametrga teng bo'lgan T_n statistik bahoga aytiladi⁵²,

$$MT_n = MT_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta \quad (2.1)$$

agar bu shart bajarilmasa, u holda bu bahoga siljigan baho deyiladi va siljish $MT_n - \theta$ ayirma sifatida aniqlanadi.

Aynan bitta parametr uchun bir nechta siljimagan baholarni tuzish mumkin.

Masalan, noma'lum parametr kuzatilayotgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutilishi bo'lsin, ya'ni, $MX = \theta$ shunday qilib $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = \theta$ (eslatib o'tamizki tanlanma bu X tasodifiy miqdorning n ta nusxasidir).

Statistik baho sifatida esa quyidagini olamiz.

$$T = T(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_1 * X_1 + a_2 * X_2 + \dots + a_n * X_n \quad (2.2)$$

Bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ o'zgarmas sonlar va ular uchun $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ tenglik o'rinli bo'lsin,

⁵¹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

⁵² Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$$MT_n = MT(X_1, X_2, \dots, X_n) = M(a_1 * X_1 + a_2 * X_2 + \dots + a_n * X_n) = \\ = a_1 * MX_1 + a_2 * MX_2 + \dots + a_n * MX_n = \theta * (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \theta$$

Shunday qilib, (2.2) noma'lum matematik kutilma uchun siljimagan baho bo'ladi.

Xususan $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ bo'lsa, u holda

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1 \quad (2.3)$$

Agar $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ bo'lsa, u holda

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X} \quad (2.4)$$

demak o'rta qiymat (matematik kutilma) μ uchun siljimagan baho tanlanma o'rta qiymat bo'lar ekan. Xuddi shunday σ^2 dispersiyani tanlanma dispersiya $\bar{S}^2$ orqali baholash mumkin. Umumiylikka zarar yetqazmasdan $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = 0$ deb olamiz ($MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n \neq 0$ bo'lgan holda $Y_1 = X_1 - \theta, Y_2 = X_2 - \theta, \dots, Y_n = X_n - \theta$, tasodifiy miqdorlarga o'tiladi), u holda $DX_1 = DX_2 = \dots = DX_n = MX^2 = \sigma^2$ bo'ladi.

$$M\bar{S}^2 = M\left(\frac{\sum_{i=1}^m X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^m X_i}{n}\right)^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^m MX_i^2}{n} - \frac{1}{n^2} * M\left(\sum_{i=1}^m X_i^2 + 2 * \sum_{i \neq j}^m X_i * X_j\right) = \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n^2} * \sum_{i \neq j}^n MX_i * MX_j = \frac{1}{n} * n * \sigma^2 - \frac{1}{n^2} * n * \sigma^2 - 0 = \\ = \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 = \frac{(n-1)}{n} * \sigma^2.$$

Shunday qilib $\bar{S}^2$ tanlanma dispersiya σ^2 dispersiya uchun siljigan baho bo'ladi. Siljish $\sigma^2 - \frac{(n-1)}{n} * \sigma^2 = \frac{1}{n} * \sigma^2$ ga teng bo'lib, bundan ko'rinib turibiki $n \rightarrow \infty$ da siljish

nolga intiladi. Demak yetarlicha katta n hajmli tanlanmalarda $\bar{S}^2$ tanlanma dispersiyani σ^2 dispersiyaning taxminan siljimagan bahosi deb qabul qilish mumkin. Kichik hajmli tanlanmalarda dispersiyaning siljimagan bahosi sifatida quyidagicha aniqlanadigan to'g'rilangan dispersiya ishlatiladi⁵³:

⁵³ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

$$S^2 = \frac{n}{n-1} * \bar{S}^2 \quad (2.5)$$

Haqiqatdan ham S^2 siljimagan baho bo'ladi, chunki

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1} * \bar{S}^2\right) = \frac{n}{n-1} M\bar{S}^2 = \frac{n}{n-1} * \frac{n-1}{n} * \sigma^2 = \sigma^2 \quad (2.6)$$

bo'ladi.

Yuqoridagi misolda ko'rsatilganidek bitta parametrga bir nechta siljimagan baho tuzish mumkin, bu baholar ichidan yaxshisini topish uchun statistik bahodan effektivlik sharti talab qilinadi.

10.7 Effektiv parametr

Effektiv baxo. Ψ_θ bilan noma'lum θ parametrning barcha siljimagan baholari to'plamini belgilaymiz. Faraz qilaylik

$$T_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \Psi_\theta, \quad T_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \Psi_\theta \text{ bo'lsin,}$$

Agar $DT_1(X_1, X_2, \dots, X_n) < DT_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ bo'lsa, u holda $T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ baho $T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ bahoga nisbatan **effektivroq** deyiladi⁵⁴.

Siljimagan baholar to'plamidagi (tanlama hajmi n berilganda) dispersiyasi eng kichik bo'lgan statistik bahoga tekis **effektiv baho** deyiladi⁵⁵.

$$T^*(X_1, X_2, \dots, X_n) = \inf_{T \in \Psi_\theta} DT(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

O'quvchiga tanlanma o'rta qiymat X_1 statistikaga nisbatan effektivroq baho bo'lishini tekshirishni taklif qilamiz.

Eslatma: tekis effektiv baho har doim mavjud bo'lavermaydi, chunki to'plam infimiumi har doim ham bu to'plamga tegishli bo'lmaydi.

Katta xajmli tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo'yiladi.

10.8 Asosli parametr

Ta'rif $\forall \varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| < \varepsilon) = 1$$

⁵⁴ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

⁵⁵ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

bo'lsa, T_n statistik baho θ parametriga uchun asosli baho deyiladi.

Demak asosli baho baholanayotgan parametriga θ ga $n \rightarrow \infty$ da ehtimol bo'yicha yaqinlashadigan statistik bahoga aytiladi.

Nazorat savollari:

1. Bosh to'plam nima?
2. Tanlanma to'plam nima?
3. Variatsion qator nima?
4. Chastota, nisbiy chastota nima?
5. Empirik taqsimot funktsiya qanday ifodalanadi?
6. Tanlanmaning sonli xarakteristikalarini qanday hisoblanadi?
7. Glivenko-Kontelli teoremlarini keltiring.
8. Noma'lum parametriga statistik bahosi deb nimaga aytiladi?
9. Statistik parametriga qanday xossalari bor?
10. Siljimagan parametriga nima?
11. Effektiv parametriga nima?
12. Asosli parametriga nima?

Agar (2.9) tenglamalar tizimining yechimi

$\theta^*(X_1, \dots, X_n) = (\theta_1^*(X_1, \dots, X_n), \dots, \theta_k^*(X_1, \dots, X_n))$ mavjud bo'lsa, u holda θ^* yechim noma'lum θ parametrga **momentlar usulida olingan baho** deyiladi⁵⁷.

Shuni ta'kidlab o'tamizki momentlar usulida bir xil ma'noli momentlar tenglashtirilishi kerak. Masalan, agar noma'lum parametrlar matematik kutilma va dispersiya bo'lsa, u holda tabiiyki quyidagi tenglamalar tizimini hosil qilamiz

$$\begin{cases} \bar{X} = \alpha_1(\theta) \\ \bar{S}^2 = \beta_2(\theta) \end{cases}$$

11.2 Eng katta o'x shashlik usuli

Belgilash kiritamiz: $f(u, \theta) = P\{X = u, \theta\}$ agar tasodifiy miqdor X diskret bo'lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa $f(u, \theta)$ tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi. U holda quyidagicha tuzilgan funktsiyaga

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) * f(x_2, \theta) * \dots * f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

O'xshashlik funktsiyasi deyiladi. Eng katta o'xshashlik usulining mohiyati shundan iboratki, noma'lum parametrga eng katta ehtimolli tanlanma asosida baxo tuzish kerak, ya'ni θ parametrni shunday tanlash kerakki, o'xshashlik funktsiyasi eng katta qiymat qabul qilsin, demak agar θ parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini Θ deb belgilasak quyidagi shartni bajarilishini talab qilamiz

$$\max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta^*)$$

Faraz qilaylik, barcha $\theta \in \Theta$ lar uchun $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) > 0$ va o'xshashlik funktsiyasi θ bo'yicha differentsiallanuvchi bo'lsin. Yuqorida aytilganlarga ko'ra, parametrning **eng katta o'xshashlik bahosi deb**⁵⁸, quyidagi tenglamaning

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta) = 0 \quad (*)$$

$\theta^* = \theta^*(x_1, \dots, x_n)$ yechimiga aytiladi. Bizga ma'lumki funktsiya va uning logarifmining statsionar nuqtalari ustma-ust tushadi, shuning uchun (*) tenglama quyidagi tenglamaga teng kuchlidir.

⁵⁷ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

⁵⁸ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

12-MAVZU BAHONING ANIQLIGI, ISHONCHLI EHTIMOL, ISHONCHLI ORALIQ, ORALIQ TAQSIMOTNING MATEMATIK KUTILMASI, DISPERSIYASI VA O'RTACHA KVADRATIK CHETLANISHLAR UCHUN ISHONCHILIK ORALIQLARI

REJA:

12.1 Oraliq baho. Ishonchlilik oralig'i

12.2 Dispersiyasi σ^2 ma'lum bo'lgan normal taqsimotning noma'lum matematik kutilmasi μ uchun ishonchlilik oralig'i

12.3 Dispersiyasi σ^2 noma'lum bo'lgan normal taqsimotning noma'lum matematik kutilmasi μ uchun ishonchlilik oralig'i

Tayanch tushunchalar:

Nuqtaviy baho. Oraliq baho. Ishonchlilik ehtimolligi. Ishonchlilik oralig'i. Pirson taqsimoti. Student taqsimoti.

12.1 Oraliq baho. Ishonchlilik oralig'i

Tanlanmadagi variantlar kam takrorlangan holdagina, tanlama berilganlari guruhlanadi, shu bilan birga guruhlar soni guruhlash usuliga bog'liq bo'lmasligi kerak. **Nuqtaviy baho**⁶⁰ deb, bitta son bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. Yoqirida ko'rilgan barcha baholar nuqtaviy baholar, chunki ular sonlar o'qida bitta sonni aniqlaydi. Hajmi unchalik katta bo'lmagan tanlanma uchun ($n < 30$) nuqtaviy baho baholanayotgan parametrdan farq qilishi mumkin, ya'ni qo'pol xatoliklarga olib kelishi mumkin. Shu sababli hajmi kichik bo'lgan tanlanmalarda oraliqli baholardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Oraliq baho deb, ikkita son - oraliq uchlari bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. Faraz qilaylik θ^* - noma'lum θ parametrning bahosi bo'lsin (θ o'zgarmas yoki tasodifiy miqdor bo'lishi mumkin). Barcha nuqtaviy baholar tanlanma asosida baholanadi, lekin tanlanmalar tasodifiy bo'lganligi uchun baholar ham tasodifiy miqdor bo'lib, asl θ parametrlardan farq qiladi. Bahoning aniqliligini Δ ($\Delta > 0$) deb belgilasak, u holda $|\theta - \theta^*| \leq \Delta$ bo'ladi, tushunarliki Δ qanchalik kichik bo'lsa, θ^* baho shunchalik aniq bo'ladi. Statistik usullar θ^* baho $|\theta - \theta^*| \leq \Delta$ tengsizlikni qanoatlantiradi deb qat'iy davo qilishga imkon bermaydi, har qanday aniqlikni qandaydir γ ehtimol bilan olish mumkin:

$$P\{|\theta - \theta^*| \leq \Delta\} = \gamma$$

⁶⁰ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

va $|\theta - \theta^*| \leq \Delta$ tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan $\theta^* - \Delta \leq \theta \leq \theta^* + \Delta$ tengsizlik bilan almashtirsak (2.17) quyidagi ko'rinishni oladi

$$P\{\theta^* - \Delta \leq \theta \leq \theta^* + \Delta\} = \gamma \quad (*)$$

(*) shart $[\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta]$ oraliq θ parametr qiymatini berilgan γ ishonchlilik ehtimoli bilan qoplashini bildiradi. $[\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta]$ oraliqqa ishonchkilik oralig'i deyiladi, γ - ehtimollikka ishonchlilik ehtimoli ham deyiladi. Ko'p hollarda γ birga yaqin qilib tanlanadi (masalan 0,95; 0,98, 0,99 va h.k.).

Eslatma. Baholanayotgan θ parametr emas, balki ishonchlilik oralig'i tasodifiy miqdor bo'lganligi uchun, θ ning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli haqida emas, balki ishonchlilik oralig'i θ ni qoplash ehtimoli haqida gapirish to'g'riroq bo'ladi.

12.2 Dispersiyasi σ^2 ma'lum bo'lgan normal taqsimotning noma'lum matematik kutilmasi μ uchun ishonchlilik oralig'i

Aytaylik, bosh to'plam parametrlari μ va σ^2 bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lsin, ya'ni kuzatilayotgan X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan va $MX = \mu$ noma'lum bo'lib, $DX = \sigma^2$ ma'lum bo'lsin. Bu $X \in N(\mu, \sigma)$ kabi belgilanadi.

Noma'lum μ parametrning statistik bahosi sifatida tanlanma o'rta qiymatini olamiz. Ma'lumki, o'zaro erkli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning yig'indisi normal taqsimotga ega bo'lib, uning parametrlari mos parametrlar yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni bizning holda $\bar{X}_n \in N(\mu, \sigma / \sqrt{n})$. Shunday qilib

$$P\left(|\bar{X}_n - \mu| \leq \Delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(u_\gamma) - 1 = \gamma$$

Bu yerda $\Delta = u_\gamma \sigma / \sqrt{n}$ ba $\Phi(u)$ - standart normal taqsimot funktsiya.

(2.19) tenglikka asosan

$$\Delta = u_\gamma \sigma / \sqrt{n}$$

Shunday qilib θ parametr uchun

$$P\left\{\bar{X}_n - \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma$$

va γ ishonchlilik ehtimoli bilan

$$\left(\bar{X}_n - u_{\gamma} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + u_{\gamma} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

oraliq noma'lum θ parametрни qoplaydi, bu yerda u_{γ} quyidagi tenglama yechimidir

$$\Phi(u_{\gamma}) = (1 + \gamma) / 2$$

va normal taqsimot funksiyasi uchun EXM dagi statistik dasturlar orqali aniqlanadi yoki keltirilgan adabiyotlardagi ilovalardan foydalanib topiladi.

χ^2 taqsimot (Pirson taqsimoti)

Aytaylik X_i ($i=1,2,\dots,n$) lar erkli normal tasodifiy miqdorlar bo'lib, shu bilan birga ularning matematik kutilmalari 0 ga, o'rtacha kvadratik chetlanishlari 1 ga teng bo'lsin, u holda bu miqdorlar kvadratlari yig'indisi:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$k = n$ erkinlik darajali χ^2 («xi kvadrat») qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi,

agar bu miqdorlar bitta chizikli munosabat bilan bog'langan, masalan, $\sum_{i=1}^n X_i = n * \bar{X}$

bo'lsa, u holda erkinlik darajalari soni $k = n - 1$ bo'ladi.

Erkinlik darajalari soni ortishi bilan taqsimot normal taqsimotga sekin yaqinlashadi.

t – taqsimot (Styudent taqsimoti)

Z normal tasodifiy miqdor, shu bilan birga $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$, V esa k erkinlik darajali χ^2 qonun bo'yicha taqsimlangan va Z ga bog'liq bo'lmagan miqdor bo'lsin, u holda

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}}$$

miqdor t – taqsimot yoki k erkinlik darajali Styudent (ingliz statistigi V. Gosset taxallusi) taqsimoti deb ataladigan taqsimotga ega. Erkinlik darajalari soni ortishi bilan Styudent taqsimoti normal taqsimotga tez yaqinlashadi.

12.3 Dispersiyasi σ^2 noma'lum bo'lgan normal taqsimotning noma'lum matematik kutilmasi μ uchun ishonchlilik oralig'i

Aytaylik $X \in N(\mu, \sigma^2)$ bo'lsin, bu holda yuqorida keltirilgan formulalardan foydalana olmaymiz, chunki bu holda ishonchlilik oralig'i noma'lum parametr σ ga bog'liq. Shuning uchun ham baho sifatida quyidagi statistikani tanlaymiz:

$$t = \frac{(\bar{x}_n - \mu) * \sqrt{n}}{S}$$

bu yerda S^2 to'g'rilangan tanlama dispersiya. Ma'lumki, t-statistika erkinlik darajasi $n - 1$ ga teng bulgan Styudent taqsimotiga (t-taqsimot) ega.

Oraliqli bahoni tuzish uchun quyidagi munosabat bajarilishini talab etamiz

$$P\left\{\frac{|\bar{x}_n - \mu| * \sqrt{n}}{S} \leq t_\gamma\right\} = \gamma$$

Bu tenglamadan t_γ miqdor berilgan n ba γ bo'yicha Styudent taqsimoti uchun EXM da mavjud statistik dasturlar bo'yicha yoki keltirilgan adabiyotlardagi ilovalardan foydalanib topiladi. Agar Y tasodifiy miqdor Styudent taqsimotiga ega bo'lsa, u holda t_γ

$$P\{|Y| \leq t_\gamma\} = \gamma$$

tenglamaning yechimi sifatida aniqlanadi. Odatda jadvalda $P(|Y| \geq t_\gamma)$ ning qiymatlari

beriladi, shuning uchun t_γ quyidagi tenglamaning

$$P(|Y| \geq t_\gamma) = 1 - \gamma$$

yechimi sifatida topiladi. Shunday qilib, noma'lum θ_1 parametr uchun quyidagi oraliq bahoga ega bo'lamiz.

$$P(\bar{X}_n - t_\gamma * \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \theta_1 \leq \bar{X}_n + t_\gamma * \frac{S}{\sqrt{n}}) = \gamma$$

Bundan kelib chiqadiki, noma'lum matematik kutilma μ uchun ishonchlilik oralig'i

$$(\bar{X}_n - t_\gamma * \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + t_\gamma * \frac{S}{\sqrt{n}})$$

ni hosil qilamiz. (2.30) va (2.22) oraliqlar o'xshashdir, bu yerda

$$\Delta = t_{\gamma} \sigma / \sqrt{n}$$

Nazorat savollari:

1. Nuqtaviy baho qanday tariflanadi?
2. Oraliq baho qanday tariflanadi?
3. Ishonchlilik oralig'i qanday tariflanadi?
4. Dispersiyasi σ^2 ma'lum bo'lgan normal taqsimotning noma'lum matematik kutilmasi μ uchun ishonchlilik oralig'I qanday aniqlanadi?
5. Dispersiyasi σ^2 noma'lum bo'lgan normal taqsimotning noma'lum matematik kutilmasi μ uchun ishonchlilik oralig'I qanday aniqlanadi?

13-MA'RUZA STATISTIK TAXMINLARNI TEKSHIRISH. ASOSIY VA ZID (KONKURENT) TAXMINLAR. BIRINCHI VA IKKINCHI TUR XATOLAR. ASOSIY TAXMINNI TEKSHIRISHNING STATISTIK ALOMATI. KRITIK BAHO. TAXMINNI QABUL QILINISH BAHOSI. KRITIK NUQTALAR

REJA:

13.1 Statistik taxmin. 1-tur va 2-tur xatoliklar

13.2 Kritik saho. Taxminni qabul qilinish sahosi. Kritik nuqtalar

KALIT SO'ZLAR:

Statistika. Statistik taxmin. 1-tur va 2-tur xatoliklar. Kritik soha. Kritik to'plam. Tasdiqlash alomati. Xi-kvadrat alomati.

13.1 Statistik taxmin. 1-tur va 2-tur xatoliklar⁶¹

Matematik statistikaning asosiy vazifalaridan biri - statistik taxminlarni tekshirishning ratsional usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Statistik taxmin, bu tajribada kuzatilayotgan tasodifiy miqdor noma'lum taqsimotining ko'rinishi yoki uning xossalari haqidagi ixtiyoriy tasdiq, yoki ma'lum taqsimotning noma'lum parametrlari haqidagi ixtiyoriy farazdir. Bunday taxminlar nazariy tushunchalar yoki tanlanma kuzatishlarning statistik tahlili asosida ilgari suriladi. Masalan, X tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega; normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor $\mu = 7$ yoki $\mu \neq 7$ o'rta qiymatga ega.

Taqsimotning noma'lum parametri θ haqidagi taxminlar oddiy va murakkab bo'ladi. Oddiy taxminda noma'lum parametr θ bitta tayin qiymat qabul qilishini ta'kidlaydi. Murakkab taxminda θ parametr qiymatlar to'plamidan qiymat qabul qilishi ta'kidlanadi ($\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$, $\theta \neq \theta_0$). Tekshirilayotgan taxmin H_0 harfi bilan belgilanadi. Bizning maqsadimiz tanlama qiymatlari tekshirilayotgan taxminni tasdiqlashini tekshirishdan iborat.

Tekshirilishi kerak bo'lgan H_0 taxmin **nolinchi (asosiy) taxmin** deyiladi. Ko'p hollarda nolinchi taxminni rad etuvchi ixtiyoriy H_1 taxmin alternativ (qarama-qarshi) taxmin ishlab chiqiladi. **Oddiy taxmin** deb faqat bitta taxminni o'z ichiga olgan taxminga aytiladi. Murakkab taxmin deb chekli yoki cheksiz sondagi oddiy taxminlardan iborat taxminga aytiladi. Shunday qilib, tekshirish natijasida faqat bitta taxmin qabul qilinadi H_0 yoki H_1 , mos ravishda ikkinchisi rad etiladi.

Taxmin bosh to'plamdan olingan tanlanmalar asosida tekshiriladi, tanlanma tasodifiy bo'lganligi uchun xatoliklarga yo'l qo'yilib, noto'g'ri xulosalar qabul qilinishi mumkin. Xatoliklar ikki turga bo'linadi. Agar taxmin to'g'ri bo'la turib, u rad etilsa 1-tur xatolikka yo'l

⁶¹ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

qo'yilgan bo'ladi. Agar taxmin noto'g'ri bo'la turib, u qabul qilinsa 2-tur xatolikka yo'l qo'yilgan bo'ladi. Bu xatolarning oqibatlari har xil bo'lishi mumkin, masalan «binoni qurish davom ettirilsin» degan to'g'ri qaror rad etilgan bo'lsa, u holda 1-tur xatolik moddiy zararga olib keladi, agar binoning ag'darilib tushish xavfiga qaramasdan «qurilish davom ettirilsin» degan qaror qabul qilingan bo'lsa, u holda ikkinchi tur xatolik kishilarning halokatiga olib kelishi mumkin. Birinchi tur xato ikkinchi tur xatoga nisbatan og'irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

1-eslatma. To'g'ri qaror ham ikki holda qabul qilinishi mumkin:

1) taxmin qabul qilinadi, u aslida ham to'g'ri edi;

2) taxmin rad etiladi, u aslida ham noto'g'ri edi.

Shunday qilib, ayrim tanlanmalar bo'yicha to'g'ri qaror qabul qilinadi, boshqalari bo'yicha noto'g'ri qaror qabul qilinadi. Qaror esa statistika yoki statistik tasnif deb ataluvchi tanlanmadan olingan biror bir funktsiyaning qiymati asosida qabul qilinadi. Bu statistika qiymatlar to'plamini ikkita kesishmaydigan to'plamlarga ajratishi mumkin:

H_0 taxmin qabul qilinadigan (rad etilmaydigan) statistikaning qiymatlar to'plam ostisi taxminning **qabul qilinish sohasi** deyiladi⁶².

H_0 taxmin qabul qilinmaydigan (rad etiladigan), H_1 taxmin qabul qilinadigan statistikaning qiymatlar to'plam ostisiga kritik soha deyiladi. Taxminlarni tekshirganda tushunarliki noto'g'ri qaror qabul qilish ehtimolini kamaytirish maqsadga muvofiqdir. Birinchi tur xatoga yo'l qo'yish ehtimolini α orqali belgilash qabul qilingan; u ahamiyatlilik darajasi deyiladi. Ahamiyatlilik darajasi ko'pincha 0,05, 0,01 ga teng qilib olinadi. Lekin ko'p holda 1-tur xatoligi ehtimolining kamayishi 2-tur xatoligi ehtimolining oshishiga olib keladi. 2 tur xatoligi β bilan belgilanadi. Shuning uchun ham statistika α va β ehtimolliklar minimal bo'ladigan qilib tanlanadi. Ushbu qo'llanmada H_0 taxmin har doim oddiy deb faraz qilinadi, shuning uchun ham to'g'ri H_0 taxminida statistika taqsimoti ma'lum. Eng yaxshi statistikani tanlash usullari ko'rib chiqilmagan. Statistikaning kritik sohasini aniqlash uchun ahamiyatlilik darajasi α va alternativ taxminning ko'rinishi e'tiborga olinadi.

13.2 Kritik saho. Taxminni qabul qilinish sahasi. Kritik nuqtalar

Noma'lum parametr θ ning qiymati haqidagi asosiy taxmin H_0 quyidagicha:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

Alternativ taxmin H_1 esa quyidagi ko'rinishlardan biri bo'lishi mumkin:

$$H_1 : \theta < \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0, H_1 : \theta \neq \theta_0$$

⁶² Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Mos ravishda chap tomonlama, o'ng tomonlama yoki ikkitomonlama kritik sohalarni olish mumkin. Kritik sohaning chegaraviy nuqtalari statistikaning taqsimot jadvalaridan aniqlanadi.

Statistik taxminni tekshirish bosqichlari quyidagilardan iborat

- 1) H_0 ba H_1 taxminlar aniqlanadi;
- 2) Statistika tanlanadi va ahamiyatlilik darajasi beriladi;
- 3) Ahamiyatlilik darajasi α , alternativ taxmin H_1 va jadvallar orqali kritik soha aniqlanadi;
- 4) Tanlanma bo'yicha statistika qiymati hisoblanadi;
- 5) Statistika qiymati kritik soha bilan taqqoslanadi;
- 6) Qaror qabul qilish: agar statistika qiymati kritik sohaga kirmasa, u holda H_0 taxmin qabul qilinadi, H_1 rad etiladi, agar kritik sohaga kirs, u holda H_0 taxmin rad etiladi, H_1 taxmin qabul qilinadi.

Ayrim hollarda altevntativ taxmin H_1 ni aniqlashdan oldin statistika qiymatini xisoblash uchun bosh to'plam parametrlarining siljimagan baholarini topishni talab etadigan 4) bosqichni bajarish maqsadga muvofiqdir. Masalan $H_0 : \mu = 7$ taxmin tekshirilayapti va o'rta qiymat uchun siljimagan baxo $\bar{x} = 8.4$ bo'lsa, u holda ko'rinishda turibiki alternativ taxmin $H_1 : \mu > 7$ yoki $H_1 : \mu = 7$ ko'rinishda qilib tanlab olish kerak.

Statistik taxminni tekshirish natijalariga quyidagicha interpretatsiya beriladi: agar H_1 taxmin qabul qilinsa, u holda bu isbotlangan hisoblanadi, agar H_0 taxmin qabul qilinsa, u holda H_0 kuzatish natijalariga zid emasligini tan olgan bo'lamiz, lekin qaror qabul qilishdan oldin yana qo'shimcha tadqiqot o'tqazish kerak bo'ladi.

Nazorat savollari:

1. Statistik taxmin nima?
2. 1- va 2- tur xatoliklarni tariflang?
3. Kritik soha nima?

14-MA'RUZA STATISTIK TAXMINLARNI TEKSHIRISHDA K. PIRSON, KOLMOGOROV-SMIRNOVLARNING TASDIQLASH ALOMATLARI. PUASSON TAQSIMOTINING PARAMETRI HAQIDAGI TAXMINNI TEKSHIRISH. NORMOL TAQSIMOTNING MATEMATIK KUTILMASI, DISPERSIYASI VA O'RTACHA KVADRATIK CHETLANISHI HAQIDAGI TAXMINLARNI TEKSHIRISH

REJA

14.1 Pirsonning χ^2 tasdiqlash alomati

14.2 Bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi taxminni χ^2 tasdiqlash alomati yordamida tekshirish qoidasi

14.3 Normal taqsimot o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum bo'lganda, uning o'rta qiymati haqidagi taxminni tekshirish

KALIT SO'ZLAR:

Statistika. Statistika taxmin. 1-tur va 2-tur xatoliklar. Kritik soha. Kritik to'plam. Tasdiqlash alomati. Xi-kvadrat alomati

14.1 Pirsonning χ^2 tasdiqlash alomati

Bosh to'plam X taqsimoti haqidagi taxminni qanday tekshirish kerakligini ko'rib chiqaylik. Aytaylik bosh to'plam qandaydir noma'lum taqsimotga ega bo'lsin. Bosh to'plamdan tanlanma olamiz. Tanlanmaga asoslanib yoki boshqa mulohazalarni e'tiborga olib bosh to'plamning aniq $F_0(x)$ taqsimot funksiyasi haqidagi taxminni tuzamiz. Bu taqsimotni nazariy deb ataymiz. Tanlanma asosida taqsimotning empirik funktsiyasi $F^*(x)$ ni topishimiz mumkin. Agar empirik taqsimot nazariy taqsimotga yaqin bo'lsa bosh to'plamning taqsimoti haqidagi $H_0: F(x) = F_0(x)$ taxminni qabul qilamiz. Bunday taxminlarni tekshirish uchun bir necha tasdiqlash alomatlari mavjud bo'lib, ulardan biri Pirsonning χ^2 tasdiqlash alomatini keltiramiz. χ^2 tasdiqlash alomatida X bosh to'plamning o'zgarish sohasini umuman olganda turli xil uzunliklarga ega bo'lgan l ta oraliqqa bo'lamiz. Tanlanma bo'yicha shu oraliqlar asosida variatsion qator tuzamiz. Agar ayrim oraliqlarda n_i chastota juda kichik bo'lsa (5 dan kichik), u holda bu oraliqlarni qo'shni oraliqlar bilan bilashtiramiz. Tanlanma asosida nazariy taqsimot parametrlarining baholarini hisoblaymiz. Shu bilan nazariy taqsimot funktsiya to'laligicha aniqlanadi. Endi nazariy taqsimot asosida X tasodifiy miqdorning i — oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolliklari p_i larni hisoblaymiz:

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = F_0(x_i) - F_0(x_{i-1}) \quad i = 1, \dots, l \quad (3.1)$$

bunda $p_1 + p_2 + \dots + p_l = 1$. Keyin nazariy chastotalarni hisoblaymiz $m_i = n \cdot p_i$ (n-tanlanma hajmi). Agar nazariy va empirik chastotalar m_i va n_i lar yetarlicha bir-biridan farq qilsa $H_0 : F(x) = F_0(x)$ taxminni qabul qilamiz. $H_0 : F(x) = F_0(x)$ taxminni tekshirish uchun quyidagi statistikadan foydalanamiz:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$$

Q^2 tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $k = l - r - 1$ bo'lgan χ^2 - taqsimotga ega, bu erda l — oraliqlar soni, r - tanlanma asosida baholari topilgan nazariy taqsimotning parametrlar soni.

Q^2 qanchalik katta bo'lsa, shunchalik nazariy va empirik taqsimotlar mutanosiblashmagan bo'ladi. Q^2 statistikaning yetarlicha katta qiymatlarida $H_0 : F(x) = F_0(x)$ taxminni rad etish kerak. Shuning uchun faqat o'ng tomonlama kritik sohadan foydalanamiz.

Agar $Q^2 \geq \chi_\alpha$ bo'lsa, taxminni rad etishga asos bor.

Agar $Q^2 < \chi_\alpha$ bo'lsa, taxminni qabul qilishga asos bor. χ_α kritik nuqta avvaldan berilgan ahamiyatlilik darajasi α va erkinlik darajasi $k = l - r - 1$ lar asosida keltirilgan adabiyotlardagi χ^2 taqsimot uchun ilovalardan yoki EXM da mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

14.2 Bosh to'planning normal taqsimlanganligi haqidagi taxminni χ^2 tasdiqlash alomati yordamida tekshirish qoidasi

Taxmin qilinayotgan taqsimot parametrlarining bahosi topiladi, ya'ni $\bar{x}_t$ va S_t lar hisoblanadi.

1. Taqsimot parametrlari bahosi normal taqsimot zichlik funksiyasiga qo'yilib, zichlik funksiyaning bahosi - $f^*(x)$ topiladi.

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} e^{-\frac{(x-\bar{x}_t)^2}{2S^2}}$$

2. Tasodifiy miqdor X ning i -oraliqqa tushish ehtimoli p_i ni quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$p_i = p(x_{i-1} < x < x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^*(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_t} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-\frac{(x-\bar{x}_t)^2}{2S_t^2}} dx =$$

$$= \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_t}{S_t}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_t}{S_t}\right)$$

bu yerda $\Phi(x)$ - normal taqsimot funktsiya va uning qiymatlari adabiyotlarda keltirilgan ilovalardan yoki EXM da mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

3. Nazariy chastotalar $m_i = n * p_i$ (n-tanlanma hajmi, p_i - X tasodifiy miqdorning i-oraliqqa tushish ehtimoli) hisoblanadi.

4. $H_0 : F(x) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}_t}{S_t}\right)$ taxminni tekshirish uchun quyidagi statistika

qiymatini hisoblaymiz:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$$

5. Avvaldan berilgan ahamiyatlilik darajasi α va erkinlik darajasi

$k = l - r - 1 = l - 2 - 1 = l - 3$ lar asosida keltirilgan adabiyotlardagi χ^2 taqsimot uchun ilovalaridan yoki EXM dagi mavjud dasturlar paketidan foydalanib kritik nuqta χ_α topiladi.

6. Agar $Q^2 < \chi_\alpha$ bo'lsa, bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi

$H_0 : F(x) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}_t}{S_t}\right)$ taxmin qabul qilinadi.

Agar $Q^2 \geq \chi_\alpha$ bo'lsa, $H_0 : F(x) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}_t}{S_t}\right)$ taxminni rad etishga asos bor.

14.3 Normal taqsimot o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum bo'lganda, uning o'rta qiymati haqidagi taxminni tekshirish

Faraz qilaylik, bosh to'plam a va σ^2 parametrli normal taqsimotga ega $X \in N(a, \sigma)$, bu yerda σ -ma'lum, α ahamiyatlilik darajasida $H_0 : \mu = \mu_0$

taxminni tekshirish kerak. Alternativ taxmin sifatida

$$H_1: \mu < \mu_0,$$

$H_1: \mu > \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ taxminlardan biri olingan bo'lsin.

Statistika sifatida quyidagi tasodifiy miqdor

$$Z = \frac{\bar{x}_T - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

olinadi. H_0 taxmin to'g'ri bo'lganda Z tasodifiy miqdor standart normal taqsimotga (0 va 1 parametrli) ega $Z \in N(0,1)$.

Kritik nuqtani adabiyotlarda keltirilgan normal taqsimot funktsiya uchun ilovalardan yoki EXM dagi mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

Agar alternativ taxmin $H_1: \mu < \mu_0$ ko'rinishda bo'lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi chap tomonlama kritik sohadan foydalanamiz:

$$\Phi(-z_\alpha) = \alpha$$

Jadval faqat musbat qiymatlar uchun berilgan, shuning uchun

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Formulani e'tiborga olib, Z_α kritik nuqtani

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

tenglikdan topamiz, u holda kritik soha

$$Z < -Z_\alpha$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar alternativ taxmin $H_1: \mu > \mu_0$ ko'rinishda bo'lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi o'ng tomonlama kritik soha olinadi:

$$P(Z > Z_\alpha) = \alpha$$

Z_α kritik nuqtani topish uchun asosan quyidagi tenglikdan foydalaniladi

$$P(Z < Z_\alpha) = \Phi(Z_\alpha) = 1 - \alpha$$

Bu erdan kritik soha ko'rinishini topamiz

$$Z > Z_{\alpha}$$

Agar alternativ taxmin $H_1: \mu \neq \mu_0$ ko'rinishda bo'lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi ikki tomonlama kritik soha olinadi:

$$P(|Z| > Z_{\alpha}) = \alpha$$

Mutlaq miqdor ta'rifiga ko'ra

$$P(Z < Z_{\alpha}) = P(Z > Z_{\alpha}) = \frac{\alpha}{2}$$

(3.11) va (3.12) formulalarga ko'ra jadvaldan foydalanish shartini olamiz:

$$\Phi(Z_{\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Shunday qilib bu holda kritik soha $|Z| > Z_{\alpha}$ ko'rinishda bo'ladi.

Nazorat savollari:

4. Statistik taxmin nima?
5. 1- va 2- tur xatoliklarni tariflang?
6. Kritik soha nima?
7. Pirsonning χ^2 tasdiqlash alomati qanday ifodalanadi?

15-MA'RUZA KORRELYATSION VA REGRESSION TAHLIL. EMPIRIK FORMULALARNI ANIQLASH USULLARI. KORRELYATSIYA JADVALI. EMPIRIK REGRESSIYA. CHIZIQLI REGRESSIYA TENGLAMASINI ANIQLASHNING YIG'INDILAR VA ENG KICHIK KVADRATLAR USULI

REJA:

15.1 Regressiya egri chiziqlarini yasash

15.2 Korrelyatsion bog'lanishning ikki asosiy masalasi

15.3 Eng kichik kvadratlar usuli.

15.4 Determinatsiya koeffitsiyenti

KALIT SO'LAR:

Korrelyatsiya. Regressiya. Regressiya egri chiziqlari. Funktsional bog'lanish. Shartli o'rta qiymat. Korrelyatsiya koeffitsienti. Chiziqli regressiya. Eng kichik kvadratlar usuli. Determinatsiya koeffitsiyenti

15.1 Regressiya egri chiziqlarini yasash

Ikkita tasodifiy miqdor funktsional bog'lanish bilan, yoki statistik deb ataladigan boshqa tur bog'lanish bilan bog'langan bo'lishi, yoki o'zaro bog'lanmagan bo'lishi mumkin.

Masalan $Y = \varphi(x)$ funktsional bog'lanishda, tasodifiy miqdorlardan biri (x) ning o'zgarishi bilan ikkinchi tasodifiy miqdor (Y) ning o'zgarishi kuzatiladi. Statistik bog'lanishda tasodifiy miqdorlardan birining o'zgarishi ikkinchisining taqsimoti o'zgarishiga olib keladi. Xususan, statistik bog'liqlik miqdorlardan birining o'zgarishi ikkinchisining o'rta qiymatining o'zgarishida ko'rinadi; bu holda statistik bog'lanish korrelyatsion bog'lanish deb ataladi. Korrelyatsion bog'lanish tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishni o'rganadi. Statistik bog'lanish yana regression bog'lanishni, ya'ni tasodifiy va tasodifiy bo'lmagan miqdorlar orasidagi bog'lanishni ham o'rganadi.

15.2 Korrelyatsion bog'lanishning ikki asosiy masalasi⁶³

1. Korrelyatsion bog'lanish formasini aniqlash, ya'ni regressiya funktsiyasining ko'rinishini (chiziqli, kvadratik, ko'rsatkichli va h.k.) topish. O'rganilayotgan ikki miqdor orasida bog'lanish bormi, agar bor bo'lsa qanday?

2. Korrelyatsion bog'lanishning zichligini aniqlash. Y ning X ga korrelyatsion bog'liqligining zichligi Y qiymatlarining Y_x shartli o'rtacha qiymat atrofida tarqoqligining kattaligi bo'yicha baholanadi. Ko'p tarqoqlik Y ning X ga kuchsiz bog'liqligidan yoki bog'liqlik yo'qligidan darak beradi. Kam tarqoqlik ancha kuchli bog'liqlik borligini ko'rsatadi. Korrelyatsion bog'liqlik ta'rifini aniqalashtiramiz, buning uchun shartli o'rtacha qiymat tushunchasini kiritamiz.

⁶³ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Shartli o'rtacha qiymat Y_x deb Y ning $X=x$ qiymatga mos qiymatlarining arifmetik o'rtacha qiymatlariga aytiladi. Agar har bir x qiymatiga shartli o'rtacha qiymatning bitta qiymati mos kelsa, u holda ravshanki shartli o'rtacha qiymat x ning funksiyasidir; bu holda Y tasodifiy miqdor X miqdorga korrelyatsion bog'liq deyiladi.

Y ning X ga korrelyatsion bog'liqligi deb, Y_x shartli o'rtacha qiymatning x ga funktsional bog'liqligiga aytiladi:

$$Y_x = f(x)$$

Yuqoridagi tenglama Y ning X ga regressiya tenglamasi deyiladi; $f(x)$ funktsiya Y ning X ga regressiyasi, uning grafigi esa Y ning X ga regressiya chizig'i deyiladi. X_y shartli o'rtacha qiymat va X ning Y ga bog'liqligi shunga o'xshash aniqlanadi: $X_y = \varphi(u)$ X ning Y ga regressiya tenglamasi.

Agar $f(x)$ va $\varphi(u)$ funktsiyalarning ikkalasi ham chiziqli bo'lsa, u holda korrelyatsiya chiziqli deyiladi. O'rganilayotgan miqdorlar orasidagi bog'liqlik ko'rinishini topishni tanlanma korrelyatsiya koeffitsiyenti osonlashtiradi:

$$r_t = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{S_X \cdot S_Y} \quad (4.1)$$

bu ifoda chiziqli korrelyatsiya koeffitsiyentining bahosidir:

$$r = \frac{M(XY) - MX \cdot MY}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (4.2)$$

Agar X va Y bog'lanmagan bo'lsa, u holda $r=0$. Teskari tasdiq esa to'g'ri emas va har doim ham bajarilmaydi. Agar X va Y – chiziqli bog'liq bo'lsa, ya'ni $Y=aX+b$ bo'lsa, u holda

$$r = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Demak, tanlanma korrelyatsiya koeffitsiyenti birga yaqin bo'lsa, u holda chiziqli regressiya funktsiyasini izlash kerak. Agar r_t nolga yaqin bo'lsa, u holda X va Y orasida chiziqli bog'lanish yo'q, lekin boshqa ko'rinishdagi bog'lanish mavjud bo'lishi mumkin, ya'ni bu holda chiziqli bo'lmagan regressiya funktsiyasini izlash kerak.

Faraz qilaylik, X va Y chiziqli korrelyatsion bog'lanish bilan bog'langan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlar tenglamasini topish uchun n ta tajriba o'tqazilgan bo'lsin, u holda n ta sonlar juftligi: $(x_1, u_1), \dots, (x_n, u_n)$ vujudga keladi. Bu sonlar juftligiga (x, u) tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari bosh to'plamidan olingan tasodifiy tanlanma sifatida qarashimiz mumkin. Aniqlik uchun, Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasini izlaymiz, ya'ni izlanayotgan tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$Y = kX + b$$

Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining burchak koeffitsiyentini Y ning X ga tanlanma regressiya koeffitsiyenti deyish va uni ρ_{yx} orqali belgilash qabul qilingan. Shunday qilib, Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining

$$Y = \rho_{yx} x + b \quad (4.4)$$

ko'rinishdagi tenglamasini izlaymiz.

O'z oldimizga ρ_{yx} va b parametrlarni shunday tanlashni vazifa qilib qo'yaylikki, kuzatish ma'lumotlari bo'yicha XOY tekislikda yasalgan $(x_1, u_1), (x_2, u_2), \dots, (x_n, u_n)$ nuqtalar iloji boricha (4.4) to'g'ri chiziq yaqinida yotsin. (4.4) chiziqli empirik formulani topish uchun bir necha xil usullar mavjud: «Tortilgan ip», «yig'indilar», «eng kichik kvadratlar» usullari.

15.3 Eng kichik kvadratlar usuli

«Eng kichik kvadratlar» usulida ushbu $Y_i - y_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) ayirmani chetlanish deb ataymiz, bu yerda Y_i – (4.4) tenglama bo'yicha hisoblangan va kuzatilayotgan x_i ga mos ordinata, y_i esa x_i ga mos kuzatilayotgan ordinata.

ρ_{yx} va b parametrlarni chetlanishlarning kvadratlari yig'indisi minimal bo'ladigan qilib tanlaymiz (eng kichik kvadratlar usulining mazmuni shundan iborat). Har bir chetlanish izlanayotgan parametrga bog'liq bo'lgani uchun chetlanishlarning kvadratlari yig'indisi ham bu parametrlarning F funksiyasi bo'ladi:

$$F(\rho_{xy}, b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 \rightarrow \min, \text{ yoki } F(\rho_{xy}, b) = \sum_{i=1}^n (\rho_{xy} x_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (4.5)$$

(4.5) funktsiya minimumini izlash uchun tegishli xususiy hosilalarni nolga tenglaymiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \rho_{xy}} = 2 * \sum_{i=1}^n (\rho_{xy} * x_i + b - y_i) * x_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 * \sum_{i=1}^n (\rho_{xy} * x_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Bu tizimni yechib, izlanayotgan parametrlarni topamiz va ularni (4.4) ga qo'yib, izlanayotgan regressiya tenglamasini topamiz. Shuni eslatib o'tish joizki, tenglamani ixtiyoriy ko'rinishda qidirish mumkin, faqat bu parametrlar tenglamada chiziqli ravishda qatnashishi talab qilinadi.

«Tortilgan ip» usulida barcha natijalar korrelyatsion maydon nuqtalari ko'rinishda tasvirlanadi.

Shuning uchun fikran bu nuqtalar orasidan ipni shunday tortish kerakki uning ikki tomonida taqriban bir xil sondagi nuqtalar yotsin. Tortilgan ip ustida yotuvchi, koordinatalari (x_1, y_1) va (x_2, y_2) bo'lgan ikki nuqtani olamiz, bu nuqtalar tanlanmada qatnashgan bo'lishi

shart emas, lekin bir-biridan yetarlicha uzoqlikda bo'lishi kerak. Bu koordinatalarni (4.4) ga qo'yib

$$\begin{cases} y_1 = \rho_{xy} * x_1 + b \\ y_2 = \rho_{xy} * x_2 + b \end{cases} \quad (4.7)$$

tenglamalar tizimiga ega bo'lamiz, ρ_{xy} va b noma'lumlarga nisbatan tenglamalar tizimni yechib, (4.4) empirik tenglama formulasini olamiz.

Yig'indilar usulida quyidagicha mulohaza yuritiladi. Kuzatishlar jadvali ko'rinishida ifodalangan, ikki o'lchovli tanlanma berilgan bo'lsin. (4.4) empirik formula topilgan deb faraz qilaylik. Unga X tasodifiy miqdorning tanlanmadagi qiymatini qo'yamiz va Y tasodifiy miqdorning mos qiymatlarini $\bar{y}_i = \rho_{yx}x_i + \epsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$ ko'rinishda yozib, Y ning o'lchangan va xisoblangan qiymatlari orasidagi chetlanishni topamiz:

$$\Delta_i = y_i - \bar{y}_i = y_i - \rho_{yx}x_i - \epsilon \quad (4.8)$$

Barcha tanlanmalar uchun chetlanishlar yig'indisi nolga teng bo'lishini talab qilish tabiiy hol:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0 \quad (4.9)$$

ρ_{xy} va b koeffitsiyentlarni topish uchun bitta tenglama olindi. Ikkita tenglamaga ega bo'lish uchun, kuzatishlar jadvalini ikki qismga ajratamiz. Faraz qilaylik, birinchi qismda r kuzatishlar bor, u holda ikkinchi qismda $(n-r)$ ta kuzatishlar mavjud bo'ladi. Jadvalning ikkala qismida ham (4.9) shart bajarilishini talab qilamiz. Natijada quyidagi chiziqli tenglamalar tizimiga ega bo'lamiz:⁶⁴

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r (y_i - \rho_{yx}x_i - \epsilon) = 0 \\ \sum_{i=r+1}^n (y_i - \rho_{yx}x_i - \epsilon) = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Mos hadlarni ajratib, quyidagini olamiz:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r y_i - \rho_{yx} \sum_{i=1}^r x_i - r \cdot b = 0 \\ \sum_{i=r+1}^n y_i - \rho_{yx} \sum_{i=r+1}^n x_i - (n-r) \cdot b = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Bundan ko'rinib turibdiki, jadvalning ikkala qismida ham x_i va y_i qiymatlarini qo'shish va keyin (4.11) tizimni yechish kerak.

⁶⁴ Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

15.4 Determinatsiya koeffitsiyenti

X va Y tasodifiy miqdorlarning o'zaro bog'liqlik zichligini ifodalovchi kattalik determinatsiya koeffitsiyenti hisoblanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (a * x_i - b - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (4.12)$$

«Eng kichik kvadratlar» usuli eng aniq, lekin eng mashaqqatli usul hisoblanadi. «Tortilgan ip» usuli eng sodda, lekin eng noaniq usul hisoblanadi.

Nazorat savollari:

1. Korrelyatsion bog'lanish qanday tariflanadi?
2. Korrelyatsion bog'lanishning asosiy masalalarini keltiring.
3. Korrelyatsiya koeffitsienti qanday ifodalanadi?
4. Korrelyatsiya koeffitsientining qanday xossalari bor?
5. Regressiya chiziqlari qanday aniqlanadi?
6. Regressiya tanglamasini aniqlashda qanday usullar bor?
7. Eng kichik kvadratlar usuli qanday ifodalanadi?
8. Determinatsiya koeffitsienti nimaga teng?

OLIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR
NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA
FANIDAN IV-SEMESTR UCHUN
AMALIY MASHG‘ULOTLAR MATERIALLARI

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

TOSHKENT-2016

I QISM. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

1- mavzu. Ehtimolning klassik, statistik va geometrik ta'riflari

Tajriba natijasida hodisalarning to'la guruhini tashkil etuvchi va teng imkoniyatli, birgalikda bo'lmagan n ta elementar hodisalarning faqat bittasi ro'y berishi mumkin bo'lsin hamda A hodisaning ro'y berishi uchun elementar hodisalardan m tasi qulaylik tug'dirsin. U holda, klassik ta'rifga ko'ra, A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad m \leq n.$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, bizni qiziqtiruvchi va har bir tajribada teng imkoniyat bilan ro'y berishi mumkin bo'lgan biror A hodisaga nisbatan bog'liqsiz tajribalar(sinashlar) ketma-ketligi o'tkazilayotgan bo'lsin. U holda A hodisaning nisbiy chastotasi deb, hodisa ro'y bergan tajribalar soni m ning o'tkazilgan barcha tajribalar soni n ga nisbatiga aytiladi:

$$w(A) = \frac{m}{n},$$

Tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda hodisaning statistik ehtimoli sifatida nisbiy chastotani yoki unga yaqinroq sonni tanlanadi.

Klassik ta'rifdan foydalanib, masalalar yechishda kombinatorika formulalari keng qo'llaniladi. Shuni e'tiborga olib, ba'zi kombinatorika formulalarini keltiramiz.

O'rin almashtirishlar soni deb, n ta turli elementlarning o'rin almashtirishlar soni

$$P_n = n!(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n); \quad 0! = 1.$$

ga aytiladi. **O'rinlashtirish**⁶⁵ deb, n ta turli xil elementdan m tadan tuzilgan, bir-biridan elementlarining tartibi, yoki tarkibi bilan farqlanuvchi kombinatsiyalarga aytiladi. Mumkin bo'lgan o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$\text{yoki} \quad A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$$

formulalari orqali topiladi.

⁶⁵ Кремер Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

n ta turli xil elementdan m tadan tuzilgan, bir-biridan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi kombinatsiyalar guruhlash deyiladi. Ularning umumiy soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ga teng. D_1 soha D sohaning qismi (bo'lagi) bo'lsin va sohaning o'lchamini (yoki uzunligi, yoki yuzi, yoki hajmini va h.k.) mes orqali belgilaylik, u holda D sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning D_1 sohaga tushish (A hodisa) ehtimoli

$$P(A) = \frac{mesD_1}{mesD}$$

tenglik orqali aniqlanadi.

1. Qutida 7 ta oq, 3 ta qora shar bor. Undan tavakkaliga olingan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. A tavakkaliga olingan shar oq ekanligi hodisasi bo'lsin. Bu tajriba 10 ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan iborat bo'lib, ularning 7 tasi A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi. Demak,

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Telefonda raqamini terayotgan abonent ohirgi ikki raqamni unutib qo'yadi va faqat bu raqamlar turlicha ekanligini eslab qolgan holda ularni tavakkaliga teradi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. B – ikkita kerakli raqam terilganlik hodisasi bo'lsin. O'nta raqamni ikkitadan o'rinashtirib, jami $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ ta turli raqamlarni terish mumkin.

Demak,

$$P(B) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

2. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. Tajribaning barcha mumkin bo'lgan elementar hodisalari soni C_5^2 ga teng. Ularning ichida C_3^2 tasi eskirmagan elementlar ulangan bo'lishi hodisasi (A) uchun qulaylik tug'diradi.

Demak,

$$P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

4. Teknik nazorat bo'limi tasodifiy ravishda ajratib olingan 100 ta kitobdan iborat partiyada 5 ta yaroqsiz kitob topdi (A hodisa). Yaroqsiz kitoblar sonining nisbiy chastotasini toping.

Yechish.

$$W(A) = \frac{5}{100} = 0,05.$$

5. Nishonga 20 ta o'q uzilgan bo'lib, ulardan 18 ta o'q nishonga tekkanligi qayd qilingan (A hodisa). Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping.

Yechish.

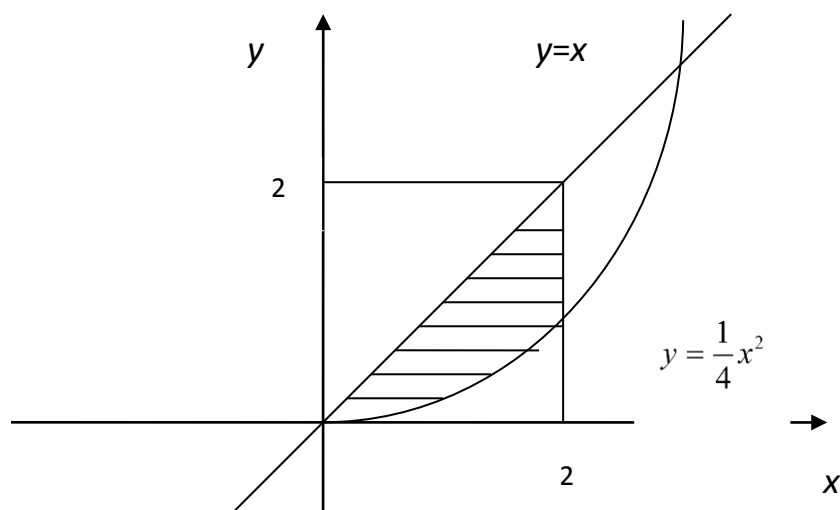
$$W(A) = \frac{18}{20} = 0,9.$$

6. $[0; 2]$ kesmadan tavakkaliga ikkita x va y sonlari tanlangan. Bu sonlar $y \leq x$ va $y \geq \frac{1}{4}x^2$ tengsizliklarni qanoatlantirishi ehtimolini toping.

Yechish. Masalaning shartidan $(x; y)$ nuqtaning koordinatalari

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 2; \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Bizni qiziqtirayotgan A hodisa tavakkaliga olingan $(x; y)$ nuqta shtrixlangan sohaga tegishli bo'lishini anglatadi. (1.1-rasm).



1.1-chizma

Shtrixlangan soha nuqtalarining koordinatalari

$$\frac{1}{4}x^2 \leq y \leq x$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Demak, izlanayotgan ehtimol shtrixlangan soha yuzining kvadrat yuziga nisbatiga teng, ya'ni

$$P(A) = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx}{4} = \frac{1}{3}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Tavakkaliga 20 dan katta bo'lmagan natural son tanlanganda, uning 5 ga karrali bo'lish ehtimolini toping.

2. Kartochkalarga 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yozilgan. Tavakkaliga 4 ta kartochka olinib, ularni bir qator qilib terilganda juft son hosil bo'lishi ehtimolini toping.

3. Ikkita o'yin kubi baravar tashlanganda quyidagi hodisalarning ro'y berish ehtimolini toping:

A - tushgan ochkolar yig'indisi 8 ga teng.

B - tushgan ochkolar ko'paytmasi 8 ga teng.

C - tushgan ochkolar yig'indisi ularning ko'paytmasidan katta.

4. 8 kishi necha usul bilan chipta olish uchun teatr kassasiga navbatga turishi mumkin?

5. Qutichada 6 ta bir hil (nomerlangan) kubik bor. Tavakkaliga bitta bittadan olingan va bir qator qilib terildan kubiklarning nomerlari o'sib borish tartibida chiqishi ehtimolini toping.

6. Qutida 5 ta bir hil buyum bo'lib, ularning 3 tasi bo'yalgan. Tavakkaliga 2 ta buyum olinganda ular orasida:

- A) bitta bo'yalgan bo'lishi;
- B) ikkita bo'yalgan bo'lishi;
- C) hech bo'lmaganda bitta bo'yalgan bo'lishi ehtimolini topig.

7. Qutida 12 ta oq va 8 ta qizil shar bor. Tavakkaliga

- A) bitta shar olinganda, uning oq bo'lishi;
- B) bitta shar olinganda, uning qizil bo'lishi;
- C) 2 ta shar olinganda, ularning turli rangda bo'lishi;
- D) 8 ta shar olinganda, ularning 3 tasi qizil rangli bo'lishi ehtimollarini toping.

8. Qutida 60 ta lampochka bo'lib, ularning 10 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga 4 ta lampochka olinadi. Olingan lampochkalar ichida:

- A) yaroqsizlari yo'q bo'lishi;
- B) yaroqlilari yo'q bo'lishi ehtimollarini toping.

9. Yashikda 30 ta birinchi nav va 6 ta ikkinchi nav detal bor. Tavakkaliga 3 ta detal olinadi:

- A) olingan uchchala detal ham birinchi nav bo'lish ehtimolini;
- B) olingan detallarning hech bo'lmaganda bittasi birinchi nav bo'lishi ehtimolini toping.

10. Ikkita o'yin kubi tashlanadi. Chiqqan ochkolar yig'indisining 7 ga teng bo'lishi ehtimolini toping.

11. N ta buyumdan iborat partiyada M ta standart buyum bor. Partiyadan tavakkaliga n ta buyum olinadi. Bu n ta buyum ichida rosa m ta standart buyum borligi ehtimolini toping.

12. M ta telegramma tasodifiy ravishda N ta aloqa bo'limiga taqsimlandi ($N > M$). Har bir aloqa bo'limiga bittadan ortiq telegramma kelmaslik hodisasining ehtimolini toping.

13. Qutida 5 ta bir hil kub bor. Har bir kubning barcha tomonlariga quyidagi harflardan biri yozilgan: o, p, r, s, t . Bittalab olingan va "bir qator qilib" terilgan kublarda "sport" so'zini o'qish mumkin bo'lishi ehtimolini toping.

14. Oltita bir hil kartochkaning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan a, t, m, r, s, o . Kartochkalar yahshilab aralashtirilgandan so'ng, bittalab olingan va "bir qator qilib" terilgan to'rtta kartochkada "soat" so'zini o'qish mumkin bo'lish ehtimolini toping.

15. Hamma tomoni bo'yalgan kub 1000 ta bir hil o'lchamli kubchalarga bo'lingan va yahshilab aralashtirilgan. Tavakkaliga olingan kubchanning a) bitta; b) ikkita; c) uchta tomoni bo'yalgan bo'lishi ehtimolini toping.

16. Aralashtirilgan 36 talik kartalar dastasidan tavakkaliga bittasi olinadi. Olingan kartaning a) "tuz" bo'lish, b) rasmlı (ya'ni "qirol", "dama" yoki "valet") bo'lish ehtimoli qanday?

17. Qutida m ta oq va n ta qora sharlar bor. Qutidan tavakkaliga bitta shar olinadi. Olingan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

18. Bitta o'yin kubi tashlangan. Unda

a) juft ochko tushishi;

b) 5 ochkodan kam bo'lmagan ochko tushishi hodisalarining ehtimollarini toping.

19. Ikkita tanga tashlangan. Agar A - tangalar bir hil tomoni bilan tushishi hodisasi, B – tangalar turli tomonlari bilan tushishi hodisasi bo'lsa, qaysi hodisaning ehtimoli kattaroq?

20. 10 nafar talaba ichida faqat ikki talaba bir guruhda o'qiydi. 10 nafar talabani yumaloq stol atrofıga tavakkaliga o'tkazilganda bir guruhda o'qiydigan ikki talabaning yonma-yon o'tirib qolish ehtimoli qanday?

21. 52 ta kartali dastadan tavakkaliga uchitasi olinadi. Ularning "3", "7" va "tuz" bo'lishi ehtimoli qanday?

22. Kotiba 5 ta xatni oldindan tayyorlab qo'yilgan 5 ta manzili ko'rsatilgan konvertlarga tasodifiy ravishda joylashtirdi. Hech bo'lmaganda bitta xatning kerakli manzilga to'g'ri yetib borish ehtimolini toping.

23. Telefon raqami 7 ta raqamdan iborat. Telefon raqamlarining:

a) turli hil bo'lishi;

b) 3 ga karrali bo'lishi ehtimollarini toping.

24. Qutida faqat ranglari bilan farqlanuvchi 22 ta shar bor: 9 ta ko'k, 5 ta sariq va 8 ta oq. Qaysi hodisaning ehtimoli kattaroq: qutidan sariq sharning chiqishimi yoki o'yin kubi tashlanganda 5 ochko tushishimi?

25. 10 ta biletdan ikkitasi yutuqli. Tavakkaliga olingan 5 ta bilet orasida bittasi yutuqli bo'lish ehtimolini toping.

26. 100 ta detal orasida 10 tasi yaroqsiz. Shu partiyadan tanlangan 5 ta detal orasida kamida bittasi yaroqsiz bo'lish ehtimolini toping.

27. 25 kishi (jumladan, ular orasida 5 tasi ayol)dan iborat kengash 3 kishilik delegatsiyani saylaydi. Agar kengashning har bir a'zosi bir hil ehtimollik bilan saylanish

huquqiga ega bo'lsa, delegatsiya ikkita ayol va bitta erkakdan iborat bo'lishi ehtimolini toping.

28. Uchta o'yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalar:

- a) ixtiyoriy ikkita kubda bir ochko, uchinchisida esa bir bo'lmagan ochko tushishi;
- b) ixtiyoriy ikkita kubda bir hildagi ochko, uchinchisida esa boshqa ochko;
- c) barcha kublarda turli ochkolar tushishi ehtimollarini toping.

29. b, o, k, i, t harflarining har biri 5 ta kartochkalardan biriga yozilgan. Kartochkalarni tasodifan bir qatorga terganda “*kitob*” so'zining hosil bo'lish ehtimolini toping.

30. O'qishni bilmaydigan bola alifbening kesilgan “ A ”, “ A ”, “ A ”, “ N ”, “ N ”, “ S ” harflarini ixtiyoriy ravishda terib chiqdi. Bunda “ANANAS” so'zining hosil bo'lish ehtimoli qanday?

31. Alohida kartochkalarga 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yozilgan. Kartochkalar yahshilab aralashtirilgach, tavakkaliga to'rttasi olinadi va ketma-ket qator qilib teriladi. Hosil bo'lgan sonlar 1, 2, 3, 4 dan iborat bo'lishi ehtimolini toping.

32. Yashikda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Yashikdan tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning ham qora bo'lish ehtimolini toping.

33. Ulug'bek, Karim va yana 10 kishi kutubxonada kitob olish uchun navbatga turdi. Ulug'bek bilan Karim o'rtasida navbatda turganlar soni roppa-rosa beshta bo'lish ehtimolini toping.

34. Domino qutisidan (28 dona) tavakkaliga yettita tosh olindi. Olingan toshlar ichida hech bo'lmaganda bittasi olti ochkoli tosh bo'lishi ehtimolini toping.

35. Mehmonxonaga n kishi keldi (ichida Hasan va Husan ham bor). Ular ikkita uch kishilik va bitta to'rt kishilik xonaga joylashtirildi. Mehmonlarni necha usul bilan joylashtirish mumkin? Agar A Hasan va Husanning bitta to'rt kishilik xonaga tushib qolishi hodisasi bo'lsa, uning ehtimolini toping.

36. O'tgan yilgi chempionatda sovrindor o'rin olgan to'rt komanda bu yilgi yigirmata komanda ichida birinchilik uchun qatnashmoqda. Agar hamma komanda beshtadan qilib, jami to'rtta guruhga ajratilgan bo'lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolini toping. $A = \{\text{birinchi va ikkinchi guruhga sovrindorlar tushmagan}\}$, $B = \{\text{har bir guruhga bittadan sovrindor tushgan}\}$.

37. Yangi o'quv yilining birinchi kuni 1- kursiga kelgan talaba 10 ta fandan tuzilgan dars jadvalidagi fanlarni tavakkaliga topishga harakat qilmoqda. Kunlik dars jadvali 3 ta fandan tashkil topgan. Ixtiyoriy fanning dars jadvaliga tushishi ehtimoli bir xil ekanligini hisobga olgan holda, talabani 3 ta fanni to'g'ri topish ehtimolini aniqlang.

38. P ta o'q otar quroli bo'lgan Zenit batereyasi bir – biriga bog'liqmas ravishda T ta samolyotga qarata o'qni otmoqda. Barcha o'q otar qurollarning bitta samolyotga qarata o'q otish ehtimolini toping.

39. 5 ta radiostanseyaga ma'lum bir paytda 6 ta radio to'loqida ishlashga ruhsat berilgan. Har bir radiostanseyaga to'loqni tavakkaliga tanlaydi. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping:

$A = \{\text{hamma radiostanseyalar bir paytda ishlaganda hech bo'lmaganda 2 ta to'loq bir – biriga mos kelmaydi}\};$

$B = \{\text{har xil radio to'loqlaridan foydalaniladi}\}.$

40. 3 ta 1-kurs, 5 ta 2-kurs va 7 ta 3-kurs talabasi fakultet talabalar kengashiga nomzod hisoblanadi. Ular orasidan tavakkaliga 5 talaba bo'lajak konferenstiyada ishtirok etish uchun tanlandi. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

$A = \{\text{faqat 3- kurslar konferenstiyada ishtirok etadi}\};$

$B = \{\text{hamma 1- kurs talabalari konferenstiyada ishtirok etadi}\};$

$C = \{\text{konferenstiyada bitta ham 2- kurs talabasi ishtirok etmaydi}\}.$

41. Buyumlar partiyasida yaroqli buyumlar nisbiy chastotasi 0,9 ga teng. Agar jami 200 ta buyum tekshirilgan bo'lsa, yaroqli buyumlar sonini toping.

42. Bankka kelgan 40 ta mijozdan 30 tasi operatsiya bajardi. Mijozlarning operatsiya bajarish nisbiy chastotasini toping.

43. Bankdan kredit olgan mijozlarning qarzini muddatida qaytarish nisbiy chastotasi 0,6 ga teng. Agar 12 ta mijoz qarzni muddatida qaytarmagan bo'lsa, hammasi bo'lib nechta mijoz kredit olgan?

44. Sharga kub ichki chizilgan. Tavakkaliga sharga tashlangan nuqtaning kubga tushish ehtimolini toping.

45. R radiusli doiraga nuqta tashlanadi. Bu nuqta doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushish ehtimolini toping.

46. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan nuqtaning doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

47. Tavakkaliga har biri 2 dan katta bo'lmagan ikkita x va y musbat son olinganda, bu sonlarning ko'paytmasi $(x \cdot y)$ birdan katta bo'lmashligi, $\frac{y}{x}$ bo'linmasi esa ikkidan katta bo'lmashligi ehtimolini toping.

48. Kvadratga doira ichki chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

49. Ikkita x va y haqiqiy son $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan qilib tavakkaliga tanlanadi. $x^2 < y$ shartning bajarilishi ehtimolini toping.

50. Parabola kvadratning pastki asosiga urinadi va uning yuqori uchlari orqali o'tadi. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning kvadratning yuqori tomoni va parabola bilan chegaralangan sohaga tushishi ehtimolini toping.

51. R radiusli doiraga muntazam oltiburchak ichki chizilgan. Doira ichiga tavakkaliga tashlangan nuqtaning oltiburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

52. Uzunligi 12 sm bo'lgan AB kesmaga tavakkaliga C nuqta qo'yiladi. AC kesmaga qurilgan kvadrat yuzi 36 sm^2 va 81 sm^2 lar orasida bo'lishi ehtimolini toping.

53. Portning tayin bir joyiga ikki paroxod kelib to'xtashi kerak. Har ikkala paroxod bir-biriga bog'lik bo'lmagan holda sutkaning ixtiyoriy vaqtida teng imkoniyat bilan bir marotaba portga kiradi. Agar birinchi paroxodning to'xtash vaqti bir soat, ikkinchi paroxodning to'xtash vaqti ikki soat bo'lsa, u holda paroxodlarning biri-biriga joy bo'shatish vaqtida uchrashib qolishlari ehtimolini toping.

54. $[-1, 2]$ kesmadan tavakkaliga ikkita son olindi. Bu sonlar yigindisi birdan katta, lekin ko'paytmasi birdan kichik bo'lish ehtimolini toping.

55. (Byuffon masalasi). Tekislikda bir-biridan $2a$ masofada joylashgan ikki tug'ri chiziq orasiga $2l$ uzunlikdagi igna tavakkaliga tashlanadi. Agar $l < a$ bo'lsa, igna parallel tug'ri chiziqlardan birini kesishi ehtimolini aniqlang.

56 Uchlari $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$ nuqtalardan iborat bo'lgan kvadratning ichga tavakkaliga $(x;y)$ nuqta tanlanadi. Quyidagi hodisaning ehtimolini toping: $A = \{ (x; y) / x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0 \}$.

57. A va B hodisalarning qiymatlari $|a| \leq 1$; $|b| \leq 1$ kvadratda teng imkoniyatli bo'lsa, quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping.

a) $A = \{ x^2 + 2ax + b \text{ kvadrat uchhadning ildizlari haqiqiy } \}$;

b) $B = \{ x^2 + 2ax + b \text{ kvadrat uchhadning ildizlari musbat } \}$.

58. Birlik aylana ichiga 3 ta A , B va C nuqtalar tavakkaliga qo'yilganda, hosil bo'lgan ABC uchburchak o'tkir burchakli bo'lish ehtimolini toping.

59. Avtomashina 7 o'rindiqdən iborat. Agar 7 kishidan uchtasi mashina haydash huquqiga ega bo'lsa, ular necha xil usul bilan o'rindiqlarga joylashishlari mumkin?

60. 5 ta belgidan iborat, a) birinchi raqami noldan farqli bo'lgan, b) raqamning birinchisi lotin alifbosining harfidan boshlanib, qolganlari noldan farqli bo'lgan 4 ta raqam bilan davom etadigan nechta turli xildagi avtomobil raqamlari mavjud?

61. Qulfni ochish uchun 5 ta turli raqamdan iborat kerakli uch xonali sonni tanlash kerak. Tajriba uchta raqamni avval terilgan kombinasiyalarni takrorlamasdan tasodifiy ravishda terishdan iborat. Qulf jami mumkin bo'lgan urinishlarning oxirgisida ochildi. Muvoffaqiyatga erishguncha bo'lgan urinishlar sonini aniqlang.

62. Avtobus parki 7 ta yo'nalishning har biriga zahiradagi 12 ta avtobusdan birini chiqarishi kerak bo'lsin. Necha xil usul bilan buni amalga oshirish mumkin?

63. O'quvchi dushanbadan juma kungacha har kuni fizika, matematika, kimyo, ingliz tili va adabiyot fanlaridan qo'shimcha mashg'ulotlarga qatnaydi (bir kunda bitta fandan mashg'ulotga boradi). O'quvchi necha usul bilan bir haftalik qo'shimcha mashg'ulotlar jadvalini tuzishi mumkin?

64. Uchlari $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ va $(1,1)$ koordinatalarda joylashgan kvadrat ichiga $M(x,y)$ nuqta tashlangan. M nuqtaning markazi koordinata boshida joylashgan birlik doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

65. Uchlari $(0,0)$, $(0,4)$, $(6,0)$, $(6,4)$ koordinatalarda joylashgan to'g'ri to'rtburchak hamda markazi $(2,2)$ nuqtada joylashgan birlik doira berilgan. To'g'ri to'rtburchakda tasodifiy tanlangan nuqtaning doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

66. Yo'lovchi buyumlarni saqlash xonasiga yuklarini joylashtirdi. Ma'lum bir vaqt o'tgach yuklarini olish uchun kelganida xona kodini unutib qo'ygani ma'lum bo'ldi. Kod raqami besh xonali sonidan iborat bo'lib, unda 23 va 37 sonlari qatnashganligini eslagan holda xonani ochish uchun jami nechta marta raqam terishi mumkin?

67. Quyidagi jadval asosida harfdan harfga o'tgan holda necha usul bilan "KVADRAT" so'zini o'qish mumkin?

						K							
					V		V						
				A		A		A					
			D		D		D		D				
		R		R		R		R		R			
	A		A		A		A		A		A		
T		T		T		T		T		T		T	

68. 0, 1, 8 raqamlarini qog'ozga yozib, qog'ozni 180° ga aylantirsak, ularning mohiyati o'zgarmaydi. 6 va 9 raqamlari esa miqdor jihatdan bir-biri bilan almashadi. 3, 4, 5, 7 raqamlari esa o'z ma'nosini yo'qotadi. To'qqiz xonali raqamlar yozilgan qog'ozni 180° ga burganda ma'nosi jihatidan o'zgarmaydigan nechta son mavjud?

69. F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 firmalar uchta turli S_1, S_2, S_3 shartnomalarni bajarish bo'yicha o'zlarining takliflarini berdilar. Ixtiyoriy firma faqat bitta shartnoma imzolashi mumkin. Shartnomalar turlicha bo'lib, F_1 firmaning S_1 shartnomani imzolashi, S_2 shartnomani imzolashidan farqlanadi. Firmalar necha usul bilan shartnoma imzolash imkoniyatiga ega? Agar barcha shartnoma tuzishlar teng imkoniyatli bo'lsa, F_3 firmaning shartnoma tuza olishi ehtimoli qanday?

2-mavzu. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari.

Shartli ehtimollik

1-teorema. Ikkita birgalikda bo'lmagan hodisadan istalgan birining ro'y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Natija. Juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalardan istalgan birining ro'y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

1-ta'rif. Ikkita A va B hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli, bu hodisalarning ehtimolliklari ko'paymasiga teng bo'lsa, ya'ni

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

u holda ular **bog'liqmas** (erkli) deyiladi⁶⁶.

2-ta'rif. Bir nechta birgalikda bo'lgan hodisalar ixtiyoriy guruhining birgalikda ro'y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarining ko'paymasiga teng bo'lsa, ya'ni

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}),$$

u holda ular **to'plamiy bog'liqmas** (erkli) deyiladi.

2-teorema. Agar $P(A)P(B) > 0$ bo'lsa, u holda ikkita hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli, ulardan birining ro'y berish ehtimolini ikkinchisining birinchisi ro'y berganligi sharti ostidagi shartli ehtimoliga ko'paymasiga aytiladi, ya'ni

$$P(AB) = P(A)P_B(A) = P(B)P_A(B).$$

⁶⁶ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр.

Natija. Bir nechta bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga ko‘paytirilganiga teng bo‘lib, har bir keyingi hodisaning shartli ehtimoli oldingi hamma hodisalar birgalikda ro‘y berdi, degan faraz ostida hisoblanadi:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n).$$

3- teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisalardan kamida bittasining ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalarning ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolini ayirilganiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Xususan, A va B hodisalar bog‘liq bo‘lsa,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(B)P_A(A)$$

formuladan, aks holda

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

formuladan foydalaniladi.

4-teorema. Birgalikda bog‘liq bo‘lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalaridan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat A hodisaning ehtimoli, 1 dan $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$ qarama-qarshi hodisalar ehtimollari ko‘pytmasining ayirilganiga teng, ya‘ni

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_n}).$$

1. Sexda bir necha stanok ishlaydi. Smena davomida bitta stanokni ta‘mirlash talab etilishi ehtimoli 0,2 ga teng, ikkita staokni ta‘mirlash talab etilishi ehtimoli 0,13 ga teng. Smena

avomida ikkitadan ortiq stanokni ta'mirlash talab etilishi ehtimoli esa 0,07 ga teng. Smena davomida stanoklarni ta'mirlash talab etilishi ehtimolini toping.

Yechish. Quyidagi hodisalarni qaraymiz.

$A = \{\text{smena davomida bitta stanokni ta'mirlash talab etiladi}\};$

$B = \{\text{smena davomida ikkita stanokni ta'mirlash talab etiladi}\};$

$C = \{\text{smena davomida ikkitadan ortiq stanokni ta'mirlash talab etiladi}\}.$

A, B va C hodisalar o'zaro birgalikda emas. Bizni qiziqtiradigan hodisa:

$(A + B + C)$ – smena davomida hech bo'lmaganda bitta stanokni ta'mirlash zarur bo'lishi hodisasining ehtimolini topamiz:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,13 + 0,07 = 0,4.$$

2. Yashikda 10 ta qizil va 6 ta ko'k shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning bir hil rangli bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A – hodisa olingan ikkala shar qizil bo'lishi, B – hodisa esa olingan ikkala sharning ko'k bo'lishi hodisasi bo'lsin. Ko'rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar. Demak,

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

A hodisaning ro'y berishiga C_{10}^2 ta elementar hodisa imkoniyat tug'diradi. B hodisaning ro'y berishiga esa C_6^2 ta elementar hodisa imkoniyat tug'diradi. Umumiy ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni esa C_{16}^2 ga teng.

Demak,

$$P(A+B) = \frac{C_{10}^2 + C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{\frac{10 \cdot 9}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2}}{\frac{16 \cdot 15}{2}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

3. Ikki ovchi bo'riga qarata bittadan o'q uzishdi. Birinchi ovchining bo'riga tegizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisniki esa 0,8 ga teng. Hech bo'lmaganda bitta o'qning bo'riga tegishi ehtimolini toping.

Yechish. A - birinchi ovchining o'qni bo'riga tegizishi hodisasi, B - ikkinchi ovchining o'qni bo'riga tegizishi hodisasi bo'lsin. Ko'rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo'lgan, ammo bir-biriga bog'liq bo'lmagan hodisalar. U holda

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94.$$

4. Tanga va kubik bir vaqtda tashlangan. “Gerb” tushishi va “3” ochko tushishi hodisalarining birgalikda ro'y berishi ehtimolini toping.

Yechish. A - tanganing “gerb” tomoni tushishi hodisasi, B - kubik tashlanganda “3” ochkoning tushishi hodisasi bo'lsin. A va B hodisalar bog'liq bo'lmagan hodisalar. Demak,

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

5. Sexda 7 ta erkak va 3 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel raqamlari bo'yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan ishchilarning erkaklar bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

A - birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi hodisasi;

B - ikkinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi hodisasi;

C - uchinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi hodisasi.

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi hodisasining ehtimoli:

$$P(A) = \frac{7}{10}$$

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi shartida ikkinchi ishchining erkak kishi bo'lishi ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli:

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Oldin ajratib olinganlarning ikkalasi erkak kishi bo'lishi sharti ostida uchinchi ajratilgan ishchining ham erkak kishi bo'lishi ehtimoli, ya'ni C hodisaning shartli ehtimoli:

$$P_{AB}(C) = \frac{5}{8}.$$

Ajratib olingan ishchilarning hammasi erkak kishilar bo'lishi ehtimoli:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

6. Ko'prik yakson bo'lishi uchun bitta aviatsiya bombasining kelib tushishi kifoya. Agar ko'prikka tushish ehtimollari mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 ga teng bo'lgan 4 ta bomba tashlangan bo'lsa, u holda ko'prikning yakson bo'lish ehtimolini toping.

Yeshish. Demak, kamida bitta bombaning ko'prikka tushishi, uni yakson bo'lishi uchun yetarli (A hodisa). U holda izlanayotgan ehtimollik

$$P(A) = 1 - 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,95$$

ga teng bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

70. Teknik nazorat bo'limi buyumlarning yaroqliligini tekhiradi. Buyumning yaroqli bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshirilgan ikkita buyumdan faqat bittasi yaroqli bo'lishi ehtimolini toping.

71. Talabaga kerakli formulani uchta ma'lumotnomada bo'lishi ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8 ga teng. Formula: a) faqat bitta ma'lumotnomada; b) faqat ikkita ma'lumotnomada; c) uchchala ma'lumotnomada bo'lishi ehtimolini toping.

72. Talaba fan bo'yicha 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Talabaning o'qituvchi taklif etgan uchta savolni bilishi ehtimolini toping.

73. Yashikda 1 dan 10 gacha raqamlangan 10 ta bir hil kubik bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta kubik olinadi. Birin ketin 1, 2, 3 raqamli kubiklar chiqishi ehtimolini quyidagi hollarda toping:

- a) kubik olingach, yashikka qaytarib solinmaydi;
- b) olingan kubik yashikka qaytarib solinadi.

74. Biror joy uchun iyul oyida bulutli kunlarning o'rtacha soni oltiga teng. Birinchi va ikkinchi iyulda havo ochiq bo'lishi ehtimolini toping.

75. Guruhda 10 ta talaba bo'lib, ularning 7 nafari a'lochilar. 4 ta talaba dekanatga chaqirtirildi. Ularning barchasi a'lochilar bo'lishi ehtimolini toping.

76. Buyumlar partiyasidan tavarshunos oily navli buyumlarni ajratmoqda. Tavakkaliga olingan buyumning oily navli bo'lishi ehtimoli 0,8 ga teng. Tekshirilgan uchta buyumdan faqat ikkitasining oily navli bo'lishi ehtimolini toping.

77. Birinchi yashikda 4 ta oq va 8 ta qora shar bor. Ikkinchi yashikda 10 ta oq va 6 ta qora shar bor. Har qaysi yashikdan bittadan shar olinadi. Ikkala sharning ham oq chiqishi ehtimolini toping.

78. Sehda 7 ta erkak va 8 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel tartib raqami bo'yicha tavakkaliga 3 kishi tanlangan. Tanlanganlarning hammasi ayol kishilar bo'lishi ehtimolini toping.

79. Birinchi yashikda 5 ta oq va 10 ta qizil shar bor. Ikkinchi yashikda esa 10 ta oq va 5 ta qizil shar bor. Agar har bir yashikdan bittadan shar olinsa, hech bo'lmaganda bitta sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

80. Bitta smenada stanokning ishlamay qolishi ehtimoli 0,05 ga teng. Uchta smenada stanokning ishlab turishi ehtimolini toping.

81. Tanga birinchi marta "gerb" tomoni bilan tushguncha tashlanadi. Tashlashlar sonining juft son bo'lishi ehtimolini toping.

82. A, B, C hodisalarning juft-juft bog'liq emasligidan, ularning birgalikda bog'liq emasligi kelib chiqmasligini ko'rsatadigan masala tuzing.

83. Otilgan torpedoning kemani cho'ktirib yuborish ehtimoli 0,5 ga teng. Agar kemani cho'ktirib yuborish uchun bitta torpedoning mo'ljalga tegishi yetarli bo'lsa, 4 ta torpedoning kemani cho'ktirib yuborishi ehtimolini toping.

84. Elektr zanjiriga erkli ishlaydigan 3 ta element ketma – ket ulangan. Birinchi, ikkinchi va uchinchi elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda quyidagiga teng:

$p_1 = 0,1; p_2 = 0,15; p_3 = 0,2$. Zanjirda elektr tok bo'lmashligi ehtimolini toping.

85. Ikki sportchidan har birining mashqni muvaffaqiyatli bajarish ehtimoli 0,5 ga teng. Sportchilar mashqni navbat bilan bajaradilar. Bunda har bir sportchi o'z kuchini ikki marta sinab ko'radi. Mashqni birinchi bo'lib bajargan sportchi mukofot oladi. Sportchilarning mukofot olishlari ehtimolini toping.

86. Merganning uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tegizishi ehtimoli 0,875 ga teng. Uning bitta o'q uzishda nishonga tegizish ehtimolini toping.

87. To'rtta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tegishi ehtimoli 0,9984 ga teng. Bitta o'q uzishda nishonga tegizish ehtimolini toping.

88. Ikki mergandan har birining o'qni nishonga tegizishi ehtimoli 0,3 ga teng. Merganlar navbat bilan o'q uzadilar, lekin har biri ikkitadan o'q uzadi. Birinchi bo'lib nishonni mag'lub etgan mergan mukofot oladi. Merganlarning mukofot olishlari ehtimolini toping.

89. Qurilma o'zaro erkli ishlaydigan ikkita elementni o'z ichiga oladi. Elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda 0,05 ga va 0,08 ga teng. Qurilmaning buzilishi uchun kamida bitta elementning buzilishi yetarli bo'lsa, qurilmaning ishlamay qolish ehtimolini toping.

90. Uchta to'pdan otishda snaryadning nishonga tegishi ehtimoli mos ravishda $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,5$; $p_3 = 0,8$. Nishon yakson qilinishi uchun bitta snaryadning tegishi kifoya bo'lsa, uchta to'pdan bir yo'la otishda nishonning yakson qilinishi ehtimolini toping.

91. Kutubhona javoniga tasodifiy tartibda 15 ta darslik terib qo'yilgan bo'lib, ulardan 5 tasi muqovali. Kutubhonachi ayol tavakkaliga 3 ta darslik oladi. Olingan darsliklarning hech bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lishi ehtimolini toping.

92. Ikkita birgalikda bo'lmagan A_1 , A_2 hodisalarning har birining ro'y berishi ehtimoli mos ravishda 0,3 va 0,8 ga teng. Bu hodisalardan faqat bittasining ro'y berishi ehtimolini toping.

93. Yashikda 14 ta qizil va 6 ta ko'k tugma bor. Tavakkaliga 2 ta tugma olinadi. Olingan ikkala tugmaning bir hil rangli bo'lishi ehtimolini toping.

94. Tetraedrning uchta tomoni mos ravishda qizil, sariq va yashil rangga buyalgan bo'lib, to'rtinchi tomoni esa shu har uchala ranga buyalgan bo'lakchalardan iborat. Agar tetraedr tavakkaliga tashlanib, Q , S va Y lar uning mos ravishda qizil, sariq va yashil rangdan iborat tomoni bilan tushishi hodisalari bo'lsa, u holda bu hodisalarning juft-jufti bilan erkli, lekin to'plamiy bog'liq ekanligini isbotlang.

95. Mavjud n ta kalitdan faqat bittasi berilgan eshikka tushadi (eshikni ochadi). Bu eshikni ochish uchun roppa-rosa k ta kalit ($k < n$) orqali urinish ehtimoli nechaga teng?

96. Talaba darsdan so'ng uyiga bir-biriga bogliq bo'lmagan holda har 20 minutda keladigan yunalishli taksida yoki har 30 minutda keladigan avtobusda ketishi mumkin. Bekatga yetib kelgan talabaning 5 minut ichida uyiga jo'nab ketishi ehtimolini toping.

97. Samolyot uchta turli qismdan iborat: uchuvchilar xonasi va dvigatel, yoqilg'i idishi hamda bulardan boshqa qismlar. Samolyot urib tushirilishi uchun uning 1- qismiga bir snaryadning, 2- qismiga ikki snaryadning va 3- qismiga uch snaryadning tegishi yetarlidir. Samolyotga otilgan snaryad har gal bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda uning turli qismlariga tegishi mumkin. Agar snaryadning samolyotga tekkanligi ma'lum bo'lsa, u holda snaryadning samolyotning k - qismga tegish ehtimoli mos ravishda p_k ga teng. Samolyotga qarata snaryad otiladi. Agar $A = \{\text{samolyotga 3 ta snaryad tegdi}\}$ hodisasi, $B = \{\text{samolyot urib tushirildi}\}$ hodisasi bo'lsa, u holda $P_A(B)$ shartli ehtimollikni toping.

98. Mavjud 20 ta jamg'arma bankidan 10 tasi shahardan tashiarida joylashgan. Tekshirish uchun tasodifiy ravishda 5 ta bank tanlandi. Tanlangan banklardan: a) 3 tasining; b) hech bo'lmaganda bittasining shahardan tashiarida joylashgan jamg'arma bank ekanligi ehtimoli qanday?

99. Musobaqada ishtirok etayotgan 16 ta futbol komandasi qur'a tashlash yo'li bilan ikki guruhga (8 tadan) ajratildi. Ikkita kuchli komandaning a) turli guruhlariga; b) bitta guruhga tushishi ehtimolini toping.

100. $\{1, 2, \dots, n\}$ raqamlar to'plamidan qaytarib solinmasdan tavakkaliga uchta raqam olingan. Agar birinchi olingan raqam ikkinchi olingan raqamdan kichik ekanligi ma'lum

bo'lsa, u holda uchinchi olingan raqam avvalgi olingan ikki raqam orasidagi raqam bo'lishi ehtimolini toping.

101. Kuzatishlarga ko'ra, agar ma'lum bir davr oralig'ida aksiyaga qo'yilgan foiz stavkasi kamaytirilsa, uni bozordagi narxining oshishi ehtimoli 0,8 ga teng bo'ladi. Shu davr oralig'ida foizi stavkasining belgilangan me'yordan kamayish ehtimoli esa 0,4 ga teng bo'ladi. Bu ma'lumotlar asosida bir vaqtning o'zida ham foizi stavkasining kamayishi, ham aksiya narxining oshishi ehtimolini toping.

102. Qurilish kompaniyasi *A* mamlakat bilan aeroport terminali qurish shartnomasini imzolash ehtimoli 0,4 ga teng. *B* mamlakat bilan bu ehtimollik 0,3 ga teng bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta mamlakat bilan shartnoma imzolashi ehtimolini toping.

103. Bankning kredit bo'limi tekshiruvdan o'tkazilganda kredit olgan firmalarning 12% i kasodga uchragani sababli yaqin 5 yil ichida qarzini qaytara olmasligi ma'lum bo'ldi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra, kredit olgan firmalarning 20% kasodga uchrar ekan. Agar bankning kredit olgan bir mijozi inqirozga uchragani ma'lum bo'lsa, uning qarzni o'z vaqtida qaytara olmaslik ehtimolini toping.

3-mavzu. To'la ehtimol va Bayes formulalari

Biror A hodisa hodisalarning to'la guruhini tashkil etuvchi va juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalarning (ular gipotezalar deb ataladi) biri bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin. Bu gipotezalarning ehtimollari ma'lum, ya'ni $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ berilgan. Bu gipotezalarning har biri yuz berganligi sharti ostida A hodisaning ro'y berish ehtimollari ham, ya'ni $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ ehtimollari ma'lum bo'sin. U holda A hodisaning ehtimoli "to'la ehtimol"⁶⁷ formulasi deb ataluvchi quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P_{B_k}(A)$$

Birgalikda bo'lmagan, hodisalarning to'la guruhini tashkil etadigan $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalar berilgan va ularning $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ ehtimollari ma'lum bo'lsin. Tajriba o'tkazilgan bo'lib, uning natijasida A hodisa ro'y bergan bo'lsin, deylik. Bu hodisalarning har bir gipoteza bo'yicha shartli ehtimollari, ya'ni $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ ma'lum. A hodisa ro'y berganligi sharti ostida B_i gipotezalar ehtimollarini qayta baholash uchun, ya'ni $P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), \dots, P_A(B_n)$ shartli ehtimollarni topish uchun

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P_{B_k}(A)}, \quad (i = \overline{1, n})$$

Bayes formulasidan foydalaniladi.

1. Birinchi qutida 2 ta oq, 6 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq, 2 ta qora shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib, ikkinchi qutiga solindi, shundan keyin ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi.

a) olingan sharning oq bo'lishi;

b) ikkinchi qutidan olingan shar oq bo'lib chiqdi. Birinchi qutidan olib ikkinchi qutiga solingan 2 ta shar oq shar bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish.

⁶⁷ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр.

a) quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A - ikkinchi qutidan olingan shar oq;

B_1 - birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan;

B_2 - birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta turli rangdagi sharlar solingan;

B_3 - birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan.

B_1, B_2, B_3 - hodisalarning to'la guruhini tashkil etganligi uchun to'la ehtimol formulasiga ko'ra,

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A)$$

bo'ladi. Bunda:

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}; \quad P(B_2) = \frac{C_2^1 C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}; \quad P(B_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28};$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{3}{4}; \quad P_{B_2}(A) = \frac{5}{8}; \quad P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}.$$

U holda:

$$P(A) = \frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{28} \cdot \frac{5}{8} + \frac{15}{28} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}.$$

b) $P_A(B_1)$ ehtimollikni Bayes formulasidan foydalanib topamiz.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{21}.$$

2. Ikkita avtomatda bir xil detallar ishlab chiqarilgandan so'ng, umumiy konveyerga o'tkaziladi. Birinchi avtomatning unumdorligi ikkinchi avtomatning unumdorligidan ikki marta ko'p. Birinchi avtomat o'rta hisobda detallarning 60% ini, ikkinchi avtomat esa o'rtacha hisobda detallarning 84% ini a'lo sifat bilan ishlab chiqaradi. Konveyerdan tavakkaliga olingan detal a'lo sifatli bo'lib chiqdi. Bu detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. A – detalning a'lo sifatli bo'lish hodisasi bo'lsin. U holda ikkita taxmin (gipoteza) qilish mumkin:

B_1 - detalning birinchi avtomatda ishlab chiqarigan bo'lishi hodisasi

$$P(B_1) = \frac{2}{3},$$

ya'ni birinchi avtomat ikkinchi avtomatga qaraganda ikki marta ko'p detal ishlab chiqaradi;

B_2 - detalning ikkinchi avtomatda ishlab chiqarigan bo'lishi hodisasi

$$P(B_2) = \frac{1}{3}.$$

Agar detal birinchi avtomatda ishlab chiqarilgan bo'lsa, uning a'lo sifatli bo'lishining shartli ehtimoli

$$P_{B_1}(A) = 0,6.$$

Agar detal ikkinchi avtomatda ishlab chiqarilgan bo'lsa, uning a'lo sifatli bo'lishining shartli ehtimoli

$$P_{B_2}(A) = 0,84.$$

Tavakkaliga olingan detalning a'lo sifatli bo'lishi ehtimoli, to'la ehtimol formulasiga ko'ra:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,84 = 0,68.$$

Olingan a'lo sifatli detal birinchi avtomatda ishlab chiqarilgan bo'lishi ehtimoli Bayes formulasiga ko'ra:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17} \approx 0,59.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

104. Yashikda 1-zavodda tayyorlangan 12 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 20 ta detal va 3-zavodda tayyorlangan 18 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning a'lo sifatli bo'lishi ehtimoli 0,9 ga teng, 2- va 3-zavodda tayyorlangan detallarning a'lo sifatli bo'lishi ehtimoli mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detalning a'lo sifatli bo'lishi ehtimolini toping.

105. Birinchi idishda 10 ta shar bo'lib, ularning 8 tasi oq, ikkinchi idishda 20 ta shar bo'lib, ularning 4 tasi oq. Har bir idishdan tavakkaliga bittadan shar olinib, keyin bu ikki shardan yana bitta shar tavakkaliga olindi. Olingan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

106. Benzin quyish shahobchasi joylashgan shassedan o'tadigan yuk mashinalari sonining o'sha shassedan o'tadigan yengil mashinalar soniga nisbati 3:2 kabi. Yuk mashinasining benzin olish ehtimoli 0,1 ga, yengil mashina uchun bu ehtimollik 0,2 ga teng. Benzin quyish shahobchasi yoniga benzin quydirish uchun mashina kelib to'htadi. Uning yuk mashinasi bo'lish ehtimolini toping.

107. Ixtisoslashtirilgan kasalxonaga bemorlarning o'rta hisobda 30% K kasallik bilan, 50% L kasallik bilan, 20% M kasallik bilan qabul qilindi. K kasallikni to'liq davolash ehtimoli 0,7 ga, L va M kasalliklar uchun bu ehtimollik mos ravishda 0,8 va 0,9 ga teng. Kasalxonaga qabul qilingan bemor butunlay sog'ayib ketganligi ma'lum bo'ldi. Bu bemor K kasallik bilan og'rgan bo'lishi ehtimolini toping.

108. Sexda tayyorlanadigan detallar 2 ta nazoratchi tomonidan tekshiriladi. Detailarni tekshiruvdan o'tkazish uchun birinchi nazoratchiga tushishi ehtimoli 0,6 ga, ikkinchi nazoratchiga tushishi ehtimoli 0,4 ga teng. Yaroqli detalning birinchi nazoratchi tomonidan yaroqsiz deb topilishi ehtimoli 0,06 ga, ikkinchi nazoratchi uchun esa bu ehtimollik 0,02 ga teng. Yaroqsiz deb topilgan detallar tekshirilganda ular ichidan yaroqli detal chiqib qoldi. Bu detalni birinchi nazoratchi tomonidan tekshirilgan bo'lishi ehtimolini toping.

109. Yashikda qora yoki oq bo'lish ehtimoli bir xil bo'lgan bir dona shar bor. Yashikka bir dona oq shar solindi va yaxshilab aralashtirilgandan so'ng, undan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan shar oq bo'lib chiqdi. Yashikda qolgan shar oq ekanligi ehtimolini toping.

110. Elektron qurilma ketma-ket ulangan ikki qismdan iborat. Birinchi qismning ishonchliligi (berilgan T vaqt ichida to'xtovsiz ishlash ehtimoli) 0,9 ga, ikkinchisidiki esa 0,8 ga teng. T vaqt ichida qurilma sinovdan o'tkazildi va bu muddat ichida qurilmaning ishdan chiqqanligi aniqlandi. Quyidagi hodisalarning ehtimollari topilsin: $A = \{T \text{ vaqt ichida faqat birinchi qismi ishdan chiqdi}\}$; $B = \{T \text{ vaqt ichida har ikkala qismi ishdan chiqdi}\}$.

111. Kuzatilayotgan astronomik jism ikki xil holatdan birida yoki B_1 holatda, yoki B_2 holatda bo'lishi mumkin. Bu holatlarning ehtimolliklari $P(B_1) = 0,6$ va $P(B_2) = 0,4$ ekanligi ma'lum. Kuzatishni bir-biriga bog'liqmas ravishda ikki observatoriya olib bormoqda. Odatda, birinchi observatoriya jism holati haqida 90%, ikkinchi observatoriya esa jism holati

haqida 80% to'g'ri ma'lumot beradi. Birinchi observatoriyadan jism B_1 , ikkinchi observatoriyadan esa jism B_2 holatda turibdi, degan ma'lumot kelgan bo'lsa, uning haqiqatda B_1 holatda turgan ekanligi ehtimolini toping.

112. Muvoffaqiyatsizlikka uchragan kosmik raketa tekshirilganda, uning halokatiga to'rt xil, ya'ni B_1 , B_2 , B_3 va B_4 faraz (gipoteza)larning sababchi bo'lishi mumkinligi aniqlandi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra, $P(B_1)=0,2$; $P(B_2)=0,4$; $P(B_3)=0,3$ va $P(B_4)=0,1$. Tekshirishlar natijasida raketa ko'tarilish vaqtida uning yoqilg'i saqlanadigan idishida yoriq paydo bo'lganligi (A hodisa) aniqlandi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra, A hodisaning shartli ehtimolliklari quyidagilarga teng: $P_{B_1}(A)=0,9$; $P_{B_2}(A)=0$; $P_{B_3}(A)=0,2$; $P_{B_4}(A)=0,4$. Ushbu sharoitda qaysi gipoteza eng ehtimolli?

113. Bank xodimi ishga tramvay yoki avtobusda borishi mumkin. Ishga 1/3 hollarda tramvayda, 2/3 hollarda avtobusda boradi. Agar u tramvayda borsa, uning ishga kechikib boorish ehtimoli 0,05 ga, avtobusda borganida 0,01 ga teng. Bugun bank xodimining ishga kechikib kelganligi ma'lum bo'lsa, uning tramvayda ishga kelganligi ehtimoli qanday?

114. Tumanda 6 ta ishlab chiqarish korxonasi, 8 ta do'kon va 4 ta bank bor. Hisobchi mutaxassisligi uchun bo'sh o'rinning borligi ehtimoli ishlab chiqarish korxonasi uchun 0,4 ga, do'kon uchun 0,3 ga va bank uchun 0,6 ga teng. a) tumanda hisobchi mutaxassisligi uchun bo'sh o'rinning mavjudligi ehtimolini toping; b) agar tumanda hisobchi mutaxassisligi uchun bo'sh o'rinning borligi ma'lum bo'lsa, u aynan bankda bo'lishi ehtimoli qanday?

115. Do'konda uchta turli markadagi muzlatkichlar 5:7:13 nisbati kabi mavjud bo'lib, kun davomida ularning 20 tasi sotilgan. Agar turli markadani muzlatkichlarning sotilishi ehtimoli teng bo'lsa, u holda sotilmay qolgan muzlatkichlarning faqat bir xil markali ekanligi ehtimolini toping.

116. Yo'lovchi kerakli yo'nalishga aviachipta sotib olish maqsadida 1-aviakassaga murojaat qilishi ehtimoli 0,4 ga, 2-aviakassaga murojaat qilishi ehtimoli 0,35 ga, 3-aviakassaga murojaat qilishi ehtimoli 0,25 ga teng. Yo'lovchi kassaga murojaat qilgan vaqtida kerakli yo'nalish uchun chiptaning tugagan bo'lishi ehtimoli mos ravishda 0,3, 0,4 va 0,6 ga teng bo'lsa, uning chipta sotib olgan bo'lishi ehtimolini toping.

117. Tijorat banki o'z mablag'larini 30 % ini ipoteka kreditiga, 40 % ini iste'mol kreditiga va qolgan 30 % ini boshqa banklarga kreditga berdi. Ipoteka kreditining qaytmaslik ehtimoli 0,1 ga, iste'mol kreditining qaytmaslik ehtimoli 0,05 ga va kreditining boshqa banklardan qaytmaslik ehtimoli 0,02 ga teng. Bankka kredit so'rab, murojaat qilgan mijozning qarzni o'z vaqtida qaytarmaslik ehtimolini toping.

118. Tijorat banki o'z mablag'larining 20 % ini davlat korxonalariga, 50 % ini ipoteka kreditiga va 30 % ini iste'mol kreditiga sarf qilgan. Mijozlarning olgan qarzlarini qaytarmaslik ehtimollari davlat korxonalariga uchun 0,1 ga, ipoteka krediti uchun 0,2 ga va iste'mol krediti uchun 0,15 ga teng bo'lsa, a) kredit olmoqchi bo'lgan yangi mijozning qarzini o'z vaqtida qaytarishi ehtimolini toping; b) qaytarilmaydigan qarz ipoteka kreditiga tegishli bo'lishi ehtimolini toping.

119. Agar bankda pul o'tkazmasi uch kun ichida amalga oshirilsa, mijozning bank bilan shartnoma tuzishi ehtimoli 0,8 ga teng. Agar mijoz pul o'tkazmasini kechroq, ya'ni bir hafta ichida olsa, uning bank bilan shartnoma tuzishi ehtimoli 0,5 ga teng. Bir haftadan ortiq vaqt ichida pul o'tkazadigan bank bilan hech bir mijoz shartnoma tuzmaydi. Bankda pul o'tkazmasining 3 kun ichida o'tishi ehtimoli 0,3 ga, bir hafta ichida o'tishi ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, mijozning bank bilan shartnoma imzolashi ehtimolini toping.

120. Qurilish ob'ektining birinchi bosqichi o'z vaqtida ishga tushishi ehtimoli 0,7 ga, 10 kun kechikib ishga tushishi ehtimoli 0,2 ga, 10 kundan 15 kungacha kechikib ishga tushishi ehtimoli 0,1 ga teng. Umumiy qurilish ob'ektining o'z vaqtida ishga tushishi ehtimoli, birinchi bosqichi o'z vaqtida tugallanishi sharti ostida 0,9 ga, 10 kun ichida tugallanishi sharti ostida 0,7 ga, 10 kundan 15 kungacha tugallanishi sharti ostida 0,6 ga tengligi ma'lum bo'lsa, qurilish ob'ektining o'z vaqtida ishga tushmagan bo'lishi ehtimolini toping.

121. Guruh 5 ta "a'lo", 10 ta "yaxshi" va 15 ta "qoniqarli" bahoga o'zlashtiruvchi talabalardan tashkil topgan. A'lochi talaba faqat "5" baho oladi. "Yaxshi" bahoga o'zlashtiruvchi talabaning "5", yoki "4" baho olishi ehtimoli bir-biriga teng, "qoniqarli" bahoga o'zlashtiruvchi talabaning "4", "3", yoki "2" baho olishi ehtimollari bir-biriga teng bo'lsa, tasodifiy ravishda chaqirilgan talabaning a) "5"; b) "4" bahoga javob berishi ehtimolini toping.

122. Mijozning bankdan olgan qarzini iqtisodiy o'sish davrida qaytara olmaslik ehtimoli 0,04 ga teng. Iqtisodiy inqiroz davrida esa bu ehtimollik 0,13 ga teng. Agar iqtisodiy o'sish davri boshlanganlik ehtimoli 0,65 ga teng, deb faraz qilsak, mijozning bankdan olgan qarzini qaytara olmaslik ehtimolini toping.

123. Kompaniyaning raqiblari bo'lmagan holda rivojlangan mamlakatlar bilan shartnoma tuzishi ehtimoli 0,45 ga, raqiblari bor bo'lgan holda esa bu ehtimollik 0,25 ga teng. Agar ekspertlarning ma'lumotlariga ko'ra, raqiblar bor bo'lishi ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, u holda kompaniyaning shartnoma tuzishi ehtimolini toping.

124. Qishki reytingni yomon o'zlashtirgan talabalarga qayta o'zlashtirish uchun fanning ehtimollar nazariyasi qismidan 60 ta, matematik statistika qismidan 40 ta, jami 100 ta savol tayyorlandi. Talaba shu savollardan birini tavakkaliga tanlab unga javob bera olsa, u qayta o'zlashtirgan hisoblanadi. Qayta o'zlashtirishga kelgan talaba ehtimollar nazariyasi bo'yicha 40 ta, matematik statistika bo'yicha 30 ta savolga tayyor ekanligi ma'lum. Qayta o'zlashtirishga kelgan talaba tavakkaliga bitta savolni tanladi va unga javob berdi. Tushgan savol matematik statistika bo'limiga doir ekanligi ehtimolini toping.

4-mavzu. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli formulasi.

Eng ehtimolli son

Agar bir nechta sinov o'tkazilayotgan bo'lib, har bir sinashda A hodisaning ro'y berishi ehtimoli boshqa sinov natijalariga bog'liq bo'lmasa, u holda bunday sinovlar A hodisaga nisbatan **erkli sinovlar** deyiladi⁶⁸.

Faraz qilaylik, n ta erkli takroriy sinovning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p , ro'y bermaslik ehtimoli $q=1-p$ bo'lsin. Shu n ta tajribadan A hodisaning (qaysi tartibda bo'lishidan qat'iy nazar) k marta ro'y berishi ehtimoli

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Bernulli formulasi bilan hisoblanadi.

A hodisaning o'tkazilayotgan n ta erkli takroriy sinov davomida kamida k marta ro'y berishi ehtimoli

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n),$$

ko'pi bilan k marta ro'y berishi ehtimoli esa

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k),$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Agar n ta erkli sinashda hodisaning k_0 marta ro'y berishi ehtimoli tajribaning boshqa mumkin bo'lgan natijalari ehtimollaridan kichik bo'lmasa, u holda k_0 soni **eng ehtimolli son**⁶⁹ deb ataladi va u quyidagi qo'sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Eng ehtimolli son (k_0) ushbu shartlarni qanoatlantiradi:

- a) agar $np - q$ kasr son bo'lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo'ladi;
- b) agar $np - q$ butun son bo'lsa, u holda ikkita k_0 va $k_0 + 1$ eng ehtimolli sonlar mavjud bo'ladi;
- c) agar np butun son bo'lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0 = np$ bo'ladi.

⁶⁸ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

⁶⁹ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

Faraz qilaylik, n ta erkli takroriy sinashning har birida $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisalarning ro'y berish ehtimollari mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_k$ ($p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$) bo'lsin. Shu n ta tajribadan $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisalarning (qaysi tartibda bo'lishidan qat'iy nazar) mos ravishda roppa-rosa $m_1, m_2, \dots, m_k$ ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$) marta ro'y berishi ehtimoli quyidagi polinomial formula bilan hisoblanadi.

$$P(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$$

1. Har bir otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli $p=2/3$. Otilgan 10 ta o'qdan 3 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. $n=10; k=3; p=\frac{2}{3}; q=\frac{1}{3}.$

U holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

2. Tanga 6 marta tashlandi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Yechish. Berilgan masalaning shartlariga ko'ra: $n=6, p=q=1/2$. U holda gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli soni

$$k_0 = np = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Demak, eng ehtimolli son $k_0=3$ bo'ladi.

3. Yashikda 5 ta oq, 10 ta qora va 15 ta yashil shar bor. Yashikdan tavakkaliga qaytarib solish sharti bilan ketma-ket 6 ta shar olindi. Olingan sharlarning bittasi oq, ikkitasi qora va uchtasi yashil bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. Berilgan masalaning shartlariga ko'ra,
 $n=6; n_1=1; n_2=2; n_3=3$ ga teng.

A_1 - yashikdan olingan sharning oq bo'lish hodisasi;

A_2 - yashikdan olingan sharning qora bo'lish hodisasi;

A_3 - yashikdan olingan sharning yashil bo'lish hodisasi bo'lsin.

U holda bu hodisalarning ro'y berish ehtimollari mos ravishda

$$P(A_1) = \frac{1}{6}; \quad P(A_2) = \frac{1}{3}; \quad P(A_3) = \frac{1}{2}$$

ga teng bo'lib, $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$ bo'ladi. Endi yuqoridagi polinomial formula yordamida $P_6(1;2;3)$ ning ehtimolini hisoblaymiz:

$$P_6(1,2,3) = \frac{6!}{1!2!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{36}.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

125. Savdo do'koniga kirgan 8 ta xaridordan har birining harid qilish ehtimoli 0,7 ga teng. Xaridorlardan beshtasining xarid qilish ehtimolini toping.

126. Biror mergan uchun bitta o'q uzishda nishonga tegizishi ehtimoli 0,8 ga teng va o'q uzish tartibiga bog'liq emas. 5 marta o'q uzilganda nishonga rosa 2 marta tegishi ehtimolini toping.

127. Tanga 10 marta tashlanganda gerbli tomon:

- a) 4 tadan 6 martagacha tushishi ehtimolini;
- b) hech bo'lmaganda bir marta tushishi ehtimolini toping.

128. Qaysi hodisaning ehtimoli katta?

a) teng kuchli raqib bilan o'ynab, to'rtta partiyadan uchtasini yutib olishimi yoki sakkizta partiyadan beshtasini yutib olishimi?

b) to'rtta partiyaning kamida uchtasini yutib olishimi yoki sakkizta partiyaning kamida beshtasini yutib olishimi?

129. Qaysi birining ehtimoli kattaroq: tangani 4 marta tashlanganda "gerb" tomonining 2 marta tushishimi, yoki 8 marta tashlanganda "gerb" tomonining 4 marta tushishimi?

130. Ishlab chiqarilgan buyumlarning 5% i yaroqsiz, tavakkaliga tanlangan 5 ta buyumdan 2 tasining yaroqsiz bo'lishi ehtimoli nimaga teng?

131. Merganning o'qni nishonga tegizishi ehtimoli 0,25 ga teng. Mergan nishonga qarata 8 ta o'q uzadi. Quyidagi ehtimollarni toping:

- a) kamida 7 ta o'q nishonga tegadi;
- b) kamida 1 ta o'q nishonga tegadi.

132. Sex mahsulotining 5% i yaroqsiz. 5 ta mahsulot tanlanganda:

- a) 1 ta ham yaroqsiz mahsulot yo‘q bo‘lishi;
b) 2 ta yaroqsiz mahsulot bo‘lishi ehtimoli nimaga teng.

133. O‘yin soqqasi 16 marta tashlanadi. 3 ga karrali ochkolarning eng ehtimolli sonini toping.

134. O‘qning nishonga tushishi ehtimoli $p=0,35$. Nishonga qarata 10 ta o‘q uziladi. Nishonga tushishlarning eng ehtimolli sonini toping.

135. Oilada 10 ta farzand bor. O‘g‘il bola va qiz bola tug‘lishi ehtimoli $p=\frac{1}{2}$ bo‘lsa, ularning 5 tasi o‘gil bola va 5 tasi qiz bola bo‘lishi ehtimolini toping.

136. Tanga 7 marta tashlanadi. Tanganing 2 marta “raqam” tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

137. O‘qning nishonga tegishi ehtimoli $p=0,7$. Nishonga otilgan 5 ta o‘qdan 2 tasining nishonga tegishi ehtimolini toping.

138. Ikki teng kuchli shaxmatchi $2n$ ta natijaviy o‘yin o‘ynashga va‘dalashdilar (durang hisobga olinmaydi). Har bir o‘yinchining navbatdagi partiyada yutishi ehtimoli 0,5 ga teng. Eng ko‘p partiyada yutgan o‘yinchining o‘yinda g‘olibi hisoblanadi. Har bir o‘yinchining 8 partiyalik o‘yinda yutish imkoniyati ko‘pmi yoki 12 partiyalik o‘yindami?

139. Qurilma ishdan chiqishi uchun undagi erkli ishlaydigan 8 ta elementdan kamida 3 tasini ishdan chiqishi etarli. Agar har bir elementning T muddat ichida ishdan chiqishi ehtimoli bir xil 0,2 ga teng bo‘lsa, shu muddat ichida butun qurilmaning ishdan chiqishi ehtimolini toping.

140. O‘zgarmas sharoitda bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan ravishda nishonga qarata uch marotaba o‘q uzildi. Har bir uzilgan o‘qning nishondagi «10» ga tegishi ehtimoli $p_{10}=0,3$; «9» ga tegishi ehtimoli $p_9=0,4$, «9» ga ham, «10» ga ham tegmasligi ehtimoli $p_0=1-0,3-0,4=0,3$ ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: $A=\{\text{bitta «10» ga va bitta «9» ga tegishi}\}$, $B=\{\text{roppa-rosa ikkita «10» ga tegishi}\}$, $C=\{\text{29 dan kam bo‘lmagan ochkoning yig‘ilishi}\}$.

141. O‘n kishidan iborat guruhdagi aspirantlarning har biri tasodifiy ravishda haftaning to‘rt kunidan birida (dushanba, seshanba, chorshanba yoki payshanba) ilmiy maqolalar bilan ishlash uchun kutibxonaga boradi. Quyidagi hodisalar ehtimollarini toping: $A=\{\text{dushanbada 1 ta, seshanbada 2 ta, chorshanbada 3 ta va payshanbada 4 ta aspirant kutibxonaga keldi}\}$, $B=\{\text{dushanbada 3 ta, seshanbada 7 ta aspirant kutibxonaga keldi}\}$, $C=\{\text{5 ta aspirant haftaning birinchi ikki kunida, qolgan 5 ta aspirant esa haftaning ikkinchi ikki kunida kutibxonaga keldi}\}$, $D=\{\text{dushanba va seshanbada birorta ham aspirant kutibxonaga kelmadi}\}$.

142. Erkli tajribalar A hodisa k marta ro'y berguncha o'tkaziladi. Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsa, n marta tajriba o'tkazish zarur bo'lishi ehtimolini toping.

143. Elektr impulsini qayd qiluvchi asbob 1 kVdan ortiq kuchlanishga ega bo'lgan ko'pi bilan 3 ta impulsga bardosh beradi, so'ng ishdan chiqadi. Agar impulsning kuchlanishi 1 kVdan ortiq bo'lishi ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, asbobning o'n beshinchi impulsda ishdan chiqishi ehtimolini toping.

144. O'rta hisobda sotuvga chiqariladigan avtomobillarning beshdan bir qismi nuqsonli. Tasodifan tanlangan 10 ta avtomobildan a) 3 tasining, b) kamida 3 tasining nuqsonli bo'lishi ehtimolini toping.

145. Oilada 10 ta farzand bor. O'g'il va qiz bolalar tug'ilishi ehtimoli bir-biriga teng ekanligini bilgan holda, bu oilada a) uchtdan kam bo'lmagan; b) ko'pi bilan uchta o'g'il bolalar borligi ehtimolini toping.

146. Muayan oliy o'quv yurti talabalarining o'zlashtirish darajasi kuzatilganda 30% i "qoniqarli", 50% i "yaxshi", 20% i "a'lo" ekanligi aniqlangan. Tavakkaliga tanlangan 6 ta talaba ichida: a) "qoniqarli", "yaxshi" va "a'lo"ga o'zlashtiruvchi talabalar sonining teng bo'lishi; b) "qoniqarli" va "a'lo"ga o'zlashtiruvchi talabalar sonining teng bo'lishi ehtimoli qanday?

147. Firmani tekshiruvdan o'tkazayotgan auditorning moliyaviy kamchiliklarni aniqlashi ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshiruv o'tkazilayotgan 4 ta firmaning yarmida moliyaviy kamchiliklarning aniqlangan bo'lishi ehtimolini toping.

148. Sug'urta vakilining har bir tashrifidan so'ng shartnoma tuzilishi ehtimoli 0,1 ga teng. 25 ta tashrifdan so'ng tuzilgan shartnomalarning eng ehtimolli sonini toping.

149. Ulgurji savdo bazasi n ta do'konga mahsulot yetkazib beradi. Kun davomida bazaga har bir do'kondan mahsulot uchun talabnoma tushishi ehtimoli 0,3 ga teng. Bazaga kun davomida: a) 6 ta; b) 5 tadan 11 tagacha; c) kamida bitta talabnomaning tushishi ehtimolini toping. Kun davomida bazaga kelib tushgan talabnomalarning eng ehtimolli sonini va uning ehtimolini toping.

150. Bir sutka ichida elektr energiya sarfi belgilangan me'yordan oshib ketmaslik ehtimoli 0,75 ga teng. Yaqin olti kunning to'rt kuni davomida elektr energiya sarfi belgilangan me'yordan oshmaslik ehtimolini toping.

151. Portga 3 ta yuk orilgan kemanding kelishi kutilmoqda. Statistik ma'lumotlarga ko'ra, keltiriladigan mollarning sifatsiz bo'lib chiqishi ehtimoli 0,01 ekanligi aniqlangan. Kutilayotgan kemalardan hech bo'lmaganda ikkitasining sifatli mol olib kelishi ehtimolini toping.

5 - mavzu. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremlari.

Puasson formulasi

Bernulli formulasini n ning katta qiymatlarida qo'llash qiyin, chunki formula katta sonlar ustida amallar bajarishni talab qiladi. Shuning uchun bizni qiziqtirayotgan bu ehtimolni Bernulli formulasini qo'llamasdan, aniq formuladan unchalik ko'p farq qilmaydigan boshqa bir taqribiy formula yordamida hisoblashga harakat qilamiz.

1-teorema. (Muavr- Laplasning lokal teoremasi)⁷⁰. Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli (n qancha katta bo'lsa, shuncha aniq)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ga teng. Bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\varphi(x)$ funksiya juft bo'lib, funksiyaning x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlaridan tuzilgan jadvallar ehtimollar nazariyasiga oid ko'pgina adabiyotlarda keltirilgan. $x \geq 4$ da $\varphi(x) = 0$ deb olinadi.

Agar n ta tajribada hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1; k_2)$ ni topish talab qilinsa, tajribalar soni katta bo'lganda, Muavr-Laplasning integral teoremasi qo'llaniladi.

2- teorema. (Muavr-Laplasning integral teoremasi)⁷¹. Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lgan n ta tajribada hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ga teng. Bu yerda

⁷⁰ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

⁷¹ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ko'rinishda bo'lib, u Laplas funksiyasi deb ataladi. Bu funksiya toq funksiya bo'lib, uning qiymatlari jadvashtirilgan va $x \geq 5$ da $\Phi(x) = 0,5$ deb olinadi.

Eslatma. Muavr-Laplasning taqribiy formulalaridan odatda $npq \geq 9$ bo'lgan hollarda foydalangan ma'qul. Agar tajribalar soni katta bo'lib, har bir tajribada hodisaning ro'y berish ehtimolini p juda kichik bo'lsa, u holda quyidagi

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Puasson formulasidan foydalaniladi, bu yerda k hodisaning n ta erkli tajribada ro'y berishlari soni, $\lambda = np$ (hodisaning n ta erkli tajribada ro'y berishlari o'rtacha soni).

1. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta o'q uzilganda rosa 75 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. $n=100; k=75; p=0,8; q=0,2$.

U holda,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25.$$

1- ilovadagi jadvaldan $\varphi(-1,25) = 0,1826$.

Demak,

$$P_{100}(75) = \frac{0,1826}{4} = 0,04565.$$

2. Agar biror hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 100 ta tajribada:

a) rosa 50 marta ro'y berish ehtimolini;

b) kami bilan 30 marta, ko'pi bilan 45 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. a) shartga ko'ra: $n=100; p=0,4; q=0,6$. Tajribalar soni n katta bo'lganligi uchun, masalani lokal teoremaga ko'ra yechamiz:

$$\frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 100 \cdot 0,4}{\sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{10}{\sqrt{24}} \approx 2,04.$$

$\varphi(x)$ - funksiyaning qiymatlar jadvalidan $\varphi(2,04) = 0,0498$ ekanligini topamiz.

Muavr-Laplasning lokal formulasidan foydalanib, izlanayotgan ehtimolni topamiz:

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \varphi(2,04) = \frac{0,0498}{24} = 0,0102.$$

b) Laplasning integral teoremasini qo'llaymiz. $n=100$; $k_1=30$; $k_2=45$; $p=0,4$ va $q=0,6$ ekanligidan

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 100 \cdot 0,4}{\sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{-10}{\sqrt{24}} \approx -2,04.$$

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{45 - 100 \cdot 0,4}{\sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \approx 1,02.$$

$\Phi(x)$ ning qiymatlar jadvalidan

$$\Phi(-2,04) = -\Phi(2,04) = -0,4793.$$

$$\Phi(1,02) = 0,3461.$$

Topilganlarni formulaga qo'yib, talab qilingan ehtimollikni topamiz.

$$P_{100}(30; 45) \approx \Phi(1,02) - \Phi(-2,04) = \Phi(1,02) + \Phi(2,04) = 0,3461 + 0,4793 = 0,8254.$$

3. A hodisaning 900 ta bog'liqmas tajribaning har birida ro'y berish ehtimoli $p=0,8$ ga teng. A hodisa:

a) 750 marta ;

b) 710 dan 740 martagacha ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. a) $n=900$; $k=750$; $p=0,8$; $q=0,2$.

U holda

$$\frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{750 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

jadvaldan

$$\varphi(2,5) \approx 0,0175.$$

Demak,
$$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} \varphi(2,5) = \frac{0,0175}{12} = 0,00146.$$

b)
$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{710 - 720}{12} \approx -0,83, \quad \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{740 - 720}{12} \approx 1,67$$

jadvaldan

$$\Phi(-0,83) = -\Phi(0,83) = -0,2967. \quad \Phi(1,67) = 0,4525.$$

Demak,

$$P_{900}(710; 740) \approx \Phi(1,67) - \Phi(-0,83) = \Phi(1,67) + \Phi(0,83) = 0,4525 + 0,2967 = 0,7492.$$

4. Telefon stansiyasi 400 ta abonentga xizmat ko'rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiya qo'ng'iroq qilishi ehtimoli 0,01 ga teng bo'lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

- a) bir soat davomida 5 ta abonent stansiya qo'ng'iroq qiladi;
- b) bir soat davomida 4 tadan ko'p bo'lmagan abonent qo'ng'iroq qiladi;
- c) bir soat davomida kamida 3 ta abonent stansiya qo'ng'iroq qiladi.

Yechish. $p=0,01$ juda kichik, $n=400$ esa katta bo'lgani uchun, $\lambda = 400 \cdot 0,01 = 4$ da Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz:

a)
$$P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0,156293.$$

b)

$$\begin{aligned} P_{400}(0 \leq k \leq 4) &= P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + P_{400}(3) + P_{400}(4) = \\ &= 0,018316 + 0,073263 + 0,146525 + \\ &\quad + 0,195367 + 0,195367 = 0,628838 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P_{400}(3 \leq k \leq 400) &= 1 - P_{400}(0 \leq k \leq 2) = \\ &= 1 - 0,018316 - 0,0732263 - 0,146525 = 0,761896. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

152. Maktabning birinchi sinfiga 260 ta bola qabul qilindi. Agar o'g'il yoki qiz tug'ilish ehtimollari bir-biriga teng bo'lsa, qabul qilinganlarning rosa 100 tasi qiz bola bo'lish ehtimolini toping.

153. Korhonada ishlab chiqarilgan buyumning 20% i yaroqsiz. 400 ta buyum ichidan yaroqsizlari sonining 50 bilan 100 orasida bo'lish ehtimolini toping.

154. Kassirning qaydnomada ko'rsatilgan pulni birinchi sanashda adashishi ehtimoli 0,04 ga teng. Uning 25 ta qaydnomadagi pullarni sanaganda ko'pi bilan ikkita qaydnomada adashishi ehtimolini toping.

155. Zavod omboriga 5000 ta sifatli buyumlar yubordi. Har bir buyumning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,0002 ga teng. 5000 ta buyum ichidan yo'lda:

- a) rosa 3 tasi shikastlanishi ehtimolini;
- b) 3 tadan ko'p bo'lmaganining shikastlanishi ehtimolini;
- c) 3 tadan ko'pining shikastlanishi ehtimolini toping.

156. Do'kon 1000 shisha ma'danli suv oldi. Do'kon omboriga joylashtirish vaqtida 1 ta shishaning sinib qolishi ehtimoli 0,003 ga teng. Do'konga keltirilgan shisha idishlarning:

- a) rosa 2 tasi;
- b) 2 tadan kami;
- c) 2 tadan ko'pi;
- g) hech bo'lmaganda bittasi singan bo'lishi ehtimolini toping.

157. Avtomat telefon stantsiyasi 1000 ta telefon abonentiga xizmat ko'rsatadi. 5 minut davomida ATSGa abonentdan chaqiriq kelishi ehtimoli 0,005 ga teng.

- a) 5 minut davomida ATSGa hech bo'lmaganda bitta chaqiriq kelishi;
- b) 5 minut davomida ATSGa 4 tadan ko'p chaqiriq kelishi ehtimollarini toping.

158. Aloqa kanallari orqali 1000 ta belgi yuboriladi. Bitta belgining xato ketish ehtimoli 0,005 ga teng, rosa 50 ta belgini xato ketish ehtimolini toping.

159. Texnologik jarayonga ko'ra, kalava ipining 1 soat davomida uzilish ehtimoli 0,2 teng. Yigiruvchi ayol 100 ta kalavaga xizmat qiladi. Uning bir soat davomida ko'pi bilan 30 ta ipni ulashi ehtimolini toping.

160. Sug'urta kompaniyasi 10000 mijozga (avtomobil egasiga) xizmat ko'rsatadi. Bir yil ichida har bir avtomobilning halokatga uchrashi natijasida ta'mir talab bo'lishi ehtimoli 0,006 ga teng. Har bir avtomobil uchun sug'urta badali bir yilga 30000 so'mni tashkil qiladi.

Agar avtomobil halokatga uchrashi natijasida ta'mir talab bo'lganda, uning egasi 3 million so'm tovon puli olishi ma'lum bo'lsa, u holda quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: $A=\{\text{bir yilda sug'urta kompaniyasi sinadi}\}$, $B=\{\text{bir yilda sug'urta kompaniyasi 45 milliondan ortiq daromad ko'radi}\}$, $C=\{\text{bir yilda sug'urta kompaniyasi 90 milliondan ortiq daromad ko'radi}\}$, $D=\{\text{bir yilda sug'urta kompaniyasi 135 milliondan ortiq daromad ko'radi}\}$.

161. Simmetrik tanga tashlanganida gerb tomoni tushishlar sonining chastotasi (0,4;0,6) intervaliga tushish ehtimoli 0,975 dan kichik bo'lmashligi uchun kamida necha marotaba tanga tashlash kerak?

162. Qutidagi oq va qora sharlar sonining nisbati 3:2 kabi. Har gal yashikdan bittadan shar olinib uning rangi e'lon qilinganidan so'ng yana yashikka qaytarib solinadi. Har bir tajribada oq shar chiqishlari sonining nisbiy chastotasi oq shar chiqishi ehtimolidan $\varepsilon=0,05$ ga farq qilmaslik ehtimoli 0,9948 dan kam bo'lmashligi uchun kamida necha marotaba shar olish tajribasini o'tkazish kerak?

163. Toblangan po'lat tarkibida uglerodning me'yori kerakli darajadan oshib ketish ehtimoli $p=0,01$ ga teng. Bu holat uchun Puasson teoremasini qo'llab yuqoridagi natija kamida bir marotaba yuz berish ehtimoli $p=0,95$ dan oshmasligini ta'minlash uchun kamida nechta mahsulot tekshiruvga keltirilishi kerak?

164. Kredit-iqtisod fakulteti talabalaridan 5% "Oliy matematika" fanidan o'tkaziladigan nazorat ishidan "a'lo" baho oladi. Fakultetda tavakkaliga tanlab olingan 100 ta talabadan a) ikkitasining; b) beshtadan kam bo'lmaganining "Oliy matematika" dan "a'lo" baho olishi ehtimolini toping.

165. Institutda 1000 ta talaba o'qiydi. Institut oshxonasi 105 o'ringa mo'ljallangan bo'lib, katta tanaffuzda har bir talabaning tushlik qilish ehtimoli 0,1 ga teng. Bugun tushlik qilmoqchi bo'lgan talabalar uchun bo'sh o'rinlarning yetmaslik ehtimolini toping.

166. Temir yo'l vokzaliga chipta sotadigan 1000 ta avtomat o'rnatilgan. Bir soat ichida bu avtomatlardan birining ishdan chiqish ehtimoli 0,004 ga teng. Bir soat ichida ikkita, uchta hamda beshta avtomatlarning ishdan chiqish ehtimoli qanday?

167. Aviakompaniyaning statistik ma'lumotlariga ko'ra, ma'lum bir reyslarga oldindan buyurtma bergan mijozlarning 5 % i buyurtmadan voz kechadi. Agar aviakompaniya 155 o'rinli samolyot uchun 160 ta chipta sotgan bo'lsa, samolyotda uchish maqsadida oldindan buyurtma bergan ixtiyoriy mijozning uchush ehtimoli qanday bo'ladi?

168. Oliy o'quv yurtiga kirish uchun kirish imtihonlarini muvoffaqiyatli topshirish kerak. Bunday sinovdan o'rtacha 25% abituriyent muvoffaqiyatli o'tishi ma'lum bo'lsa, qabul komissiyasiga tushgan 1889 ta ariza bo'yicha sinovda qatnashgan abituriyentlarning hech bo'lmaganda 500 tasining barcha imtihonlarni muvoffaqiyatli topshirishi ehtimoli qanday?

169. Kompyuter sistematsi 45 ta bir xil mikroelementlardan iborat. Muayyan vaqtda har bir mikroelementning ish holatida bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng. Agar biror bir operatsiyani

bajarish uchun hech bo'lmaganda 30 ta mikroelementning ish holatida bo'lishi talab qilinsa, operatsiyaning muvaffaqiyatli bajarilish ehtimoli qanday?

170. Muayyan partiya 200 ta televizordan iborat bo'lib, do'kon ularni xaridorlarga sotib yubordi. Bu partiyadagi televizorlarning kafolat davri ichida ta'mirlanish ehtimoli 0,01 ga teng. Kafolat davri ichida shu partiyadan televizor xarid qilgan rosa 4 ta xaridorning ustaxonaga murojaat qilish ehtimolini toping.

171. Korxonada muayyan turdagi 1000 ta uskuna mavjud. Bir soat ichida har bir uskunaning ishdan chiqish ehtimoli 0,001 ga teng. Bir soat ichida hech bo'lmaganda 2 ta uskunaning ishdan chiqish ehtimolini toping.

6-mavzu. Tasodifiy miqdorlar. Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Masalan, o'yin kubi tashlanganda tushishi mumkin bo'lgan ochkolar soni, ishga kech qoluvchi xizmatchilar soni va hokazolar tasodifiy miqdorga misol bo'la oladi.

1-ta'rif. Tasodifiy miqdor deb, avvaldan noma'lum bo'lgan va oldindan inobatga olib bo'lmaydigan tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan hamda sinash natijasida bitta mumkin bo'lgan qiymatni qabul qiluvchi miqdorga aytiladi⁷².

Odatda, tasodifiy miqdorlarni lotin alifbosining tartibi bo'yicha oxirgi katta $X, Y, Z \dots$ va h.k. harflari bilan, uning mumkin bo'lgan qiymatlarini kichik $x, y, z, \dots$ va h.k. harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlar diskret yoki uzluksiz bo'lishi mumkin.

2-ta'rif. Diskret tasodifiy miqdor deb, ayrim, ajralgan qiymatlarni ma'lum ehtimol bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi⁷³.

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni chekli yoki sanoqli bo'lishi mumkin.

3-ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdor⁷⁴ deb, chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan miqdorga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni sanoqli bo'lmagan cheksizdir.

4-ta'rif. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi usullar bilan berilishi mumkin:

a) birinchi satri mumkin bo'lgan x_k qiymatlardan, ikkinchi satri p_k ehtimollardan iborat jadval ko'rinishida, ya'ni:

$$\begin{array}{l} X : x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \\ P : p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n \end{array}$$

bu yerda

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{k=1}^n p_k = 1.$$

⁷² Кремер Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр.

⁷³ Кремер Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр.

⁷⁴ Кремер Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр.

b) grafik usulda, ya'ni Dekart koordinatalar sistemasida (x_k, p_k) nuqtalar aniqlanadi, so'ngra ularni ketma-ket kesmalar bilan tutashtirib, taqsimot ko'pburchagi deb ataluvchi shakl (poligon) hosil qilinadi.

c) analitik usulda (formula ko'rinishida), ya'ni $P(X = k) = f(x)$.

Masalan, diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollari:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

ko'rinishda aniqlanadigan bo'lsin, u holda tasodifiy miqdor "binomial taqsimot qonuniga" bo'ysunadi deyiladi va uni $B(n, p)$ ko'rinishida shartli belgilanadi.

Shuningdek, diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollari:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np$$

formula bilan aniqlanadigan bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdor "Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi" deyiladi⁷⁵.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollari:

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \quad k=1, 2, \dots$$

formula bilan aniqlanadigan bo'lsa, bunday diskret tasodifiy miqdor " p parametrli geometrik taqsimot qonuniga" bo'ysunadi deyiladi.

1. Talabani yozma ish variantidagi savollarning har biriga javob berishi ehtimoli 0,7 ga teng. Yozma ish variantidagi 4 ta savolga bergan javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdor orqali talabani javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$. dan iborat bo'ladi. $n = 4$, $p = 0,7$; $q = 0,3$ ekanligidan, X ning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi.

$$p_1 = P_4(0) = C_4^0 (0.7)^0 (0.3)^4 = 0.0081;$$

$$p_2 = P_4(1) = C_4^1 (0.7)^1 (0.3)^3 = 0.0756;$$

$$p_3 = P_4(2) = C_4^2 (0.7)^2 (0.3)^2 = 0.2646;$$

⁷⁵ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр.

$$p_4 = P_4(3) = C_4^1(0.7)^3(0.3)^1 = 0.4116;$$

$$p_5 = P_4(4) = C_4^4(0.7)^4(0.3)^0 = 0.2401.$$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Tekshirish: $0,0081 + 0,0756 + 0,2646 + 0,2401 = 1.$

2. Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqishi ehtimoli 0,1 ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X diskret tasodifiy miqdor orqali bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonini

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 3.$$

orqali belgilaymiz.

Bundan tashqari $n=3$; $p=0,1$; $q=0,9$ ekanligini hisobga olsak,

$$p_1 = P_3(0) = C_3^0(0.1)^0(0.9)^3 = 0.729;$$

$$p_2 = P_3(1) = C_3^1(0.1)^1(0.9)^2 = 0.243;$$

$$p_3 = P_3(2) = C_3^2(0.1)^2(0.9)^1 = 0.027;$$

$$p_4 = P_3(3) = C_3^3(0.1)^3(0.9)^0 = 0.001.$$

U holda, taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

3. Do'konga tashrif buyurgan har bir mijozning xarid qilish ehtimoli $p=0,8$ ga teng. Quyidagilarni toping:

a) xarid qilishlar soniga teng bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini;

b) $1 \leq X \leq 3$ va $X > 3$ hodisalarning ehtimolini;

c) taqsimot ko'pburchagini chizing.

Yechish. a) X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4.

Ehtimollarni Bernulli formulasi bo'yicha hisoblaymiz:

$$p_1 = P_4(X = 0) = C_4^0 (0.8)^0 (0.2)^4 = 0.0016;$$

$$p_2 = P_4(X = 1) = C_4^1 (0.8)^1 (0.2)^3 = 0.0256;$$

$$p_3 = P_4(X = 2) = C_4^2 (0.8)^2 (0.2)^2 = 0.1536;$$

$$p_4 = P_4(X = 3) = C_4^3 (0.8)^3 (0.2)^1 = 0.4096;$$

$$p_5 = P_4(X = 4) = C_4^4 (0.8)^4 (0.2)^0 = 0.4096;$$

a) X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Tekshirish:

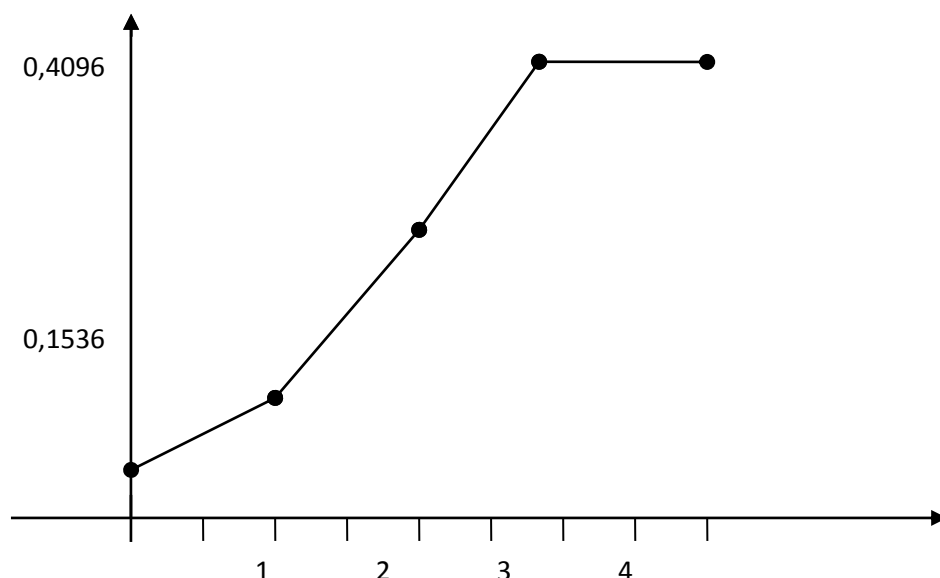
$$0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.$$

b)

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \\ &= 0.0256 + 0.1536 + 0.4096 = 0.5888; \end{aligned}$$

$$P(X > 3) = P(X = 4) = 0.4096.$$

c) taqsimot ko'pburchagini yasaymiz:



6.1- chizma

4. Telefon stansiyasi 800 ta abonentga xizmat ko'rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiyaga qo'ng'iroq qilishi ehtimoli 0,01 ga teng bo'lsa, telefon stansiyasiga qo'ng'iroq qilgan abonentlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $p=0,01$, $n=800$, $\lambda = 800 \cdot 0,01 = 8$. Puasson taqsimot qonuni bo'yichaga X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzamiz:

X	0	1	2	3	...	799	800
P	e^{-8}	$8e^{-8}$	$32e^{-8}$	$\frac{256}{3}e^{-8}$	...	$\frac{8^{799}}{799!}e^{-8}$	$\frac{8^{800}}{800!}e^{-8}$

5. O'yin kubigi "1" ochkosi tushguncha tashlanadi. Agar tashlashlar soni 3 tadan ortiq bo'lmasa, "1" ochkosi tushguncha tashlashlar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish. Masalada X tasodifiy miqdorning hodisaning birinchi ro'y berishigacha bo'lgan tajribalar soni bo'lib, uning mumkin bo'lgan qiymatlari: 1, 2, 3 dan iborat bo'ladi.

O'yin kubi bir marta tashlanganda "1" ochkoning tushishi ehtimoli $p = \frac{1}{6}$ ga teng ekanligini bilgan holda, geometrik taqsimot qonunini tuzish formulasiga ko'ra:

X	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$

ekanligini aniqlaymiz.

Mustaqil yechish uchun masalalar

172. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Taqsimot ko'pburchagini yasang.

173. Qutida 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan 1 ta shar olindi. X tasodifiy miqdor - olingan oq sharlar soni bo'lsa, uning taqsimoti qonunini tuzing.

174. 10 ta detal solingan yashikda 8 ta yaroqli detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi yaroqli detallar sonining taqsimot qonunini tuzing.

175. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

a)

$X : 2 \quad 4 \quad 5 \quad 6$
 $P : 0,3 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,4$

b)

$X : 10 \quad 15 \quad 20$
 $P : 0,1 \quad 0,7 \quad 0,2$

Taqsimot ko'pburchagini yasang.

176. Ma'lum bir partiyada yaroqsiz detallar 10% ni tashkil etadi. Tavakkaliga 4 ta detal tanlab olinadi. Bu 4 ta detal orasida yaroqsiz detallar sonidan iborat bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimot qonunini toping.

177. Qiz va o'g'il bolalarning tug'ilish ehtimollari teng deb faraz qilinadi. To'rtta farzandi bo'lgan oiladagi o'g'il bolalar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

178. Turli faoliyat bilan shug'illanuvchi uchta firma bir-biriga bog'liqmas ravishda o'z mahsuloti bilan ko'rgazmada ishtirok etmoqda. Ko'rgazmada g'olib bo'lish ehtimoli birinchi firma uchun 0,8 ga, ikkinchisi uchun 0,6 ga, uchinchisi uchun 0,5 ga teng. Ko'rgazmada g'olib bo'lgan firmalar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

179. Ichida 5 ta oq va 7 qora shar bo'lgan idishdan 4 ta shar olinadi. Olingan oq sharlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

180. Ikkita tanga 3 martadan tashlanadi. «Gerbli» tomon tushishlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

181. Agar bitta o'q uzishda nishonga tegish ehtimoli $3/4$ ga teng bo'lsa, 3 ta o'q uzishda nishonga tegishlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

182. Ichida 4 ta oq va 6 ta qora shar bo'lgan idishdan 5 ta shar olinadi. Chiqqan oq sharlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

183*. X va Y tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog'liq bo'lmagan, bir xil p parametrli geometrik taqsimot qonunga ega. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

184*. X va Y tasodifiy miqdorlar mos ravishda bir-biriga bog'liq bo'lmagan λ_1 , λ_2 parametrli Puasson taqsimot qonunga ega. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

185*. X va Y tasodifiy miqdorlar mos ravishda bir-biriga bog'liq bo'lmagan, $B(n_1, p)$, $B(n_2, p)$ Binomial taqsimot qonuniga bo'ysunadi. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

186. Bankka 30 ta xabarnoma yuborilgan bo'lib, ulardan 5 tasining soxta ekanligi ma'lum. Tasodifiy ravishda tanlab olingan 15 ta xabarnoma tekshirildi. Tekshiruv natijasida aniqlanishi mumkin bo'lgan soxta xabarnomalar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Tekshiruv natijasida ko'pi bilan 2 ta soxta xabarnomaning aniqlanishi ehtimolini toping.

187. Qurilish kompaniyasida auditorlik tekshiruvi o'tkazayotgan auditor tekshirish uchun tavakkaliga 5 ta hisob-kitob operasiyalari hujjatini tanlab oldi. Hujjatlarning 3% ida xatolik bor ekanligi ma'lum. Xatosiz yuritilgan hujjatlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Hech bo'lmaganda bitta hujjatda xatoga yo'l qo'yilgan bo'lish ehtimolini toping.

188. Telekanalda yangi kinofilm haqida reklama berilmoqda. Teletomoshabinlarning bu reklamani ko'rish ehtimoli 0,2 ga teng. Tasodifiy ravishda 10 ta tomoshabin tanlab olindi. Yangi kinofilm haqidagi reklama ko'rgan tomoshabinlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Tanlab olingan tomoshabinlarning hech bo'lmaganda ikkitasining reklamani ko'rgan bo'lish ehtimolini toping.

189. Bankka pul qo'ygan omonatchilarning har beshinchisi omonat foizini olish uchun keladi. Agar hozir o'z navbatini kutib turgan mijozlar soni 5 tani tashkil qilsa, foizini olish uchun kelgan omonatchilar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing.

190. Shaharda 10 ta tijorat banki bor. Bir yil ichida har bir bankning bankrotga uchrash ehtimoli 0,1 ga teng. Kelgusi yil ichida bankrotga uchrashi mumkin bo'lgan banklar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Taqsimot ko'pburchagini yasang. Bir yil ichida hech bo'lmaganda bitta bankning bankrotga uchrash ehtimolini toping.

191. Navbatchi turli reyslar bo'yicha avtobuslarning avtovakzalga kelib to'xtashi haqida ma'lum qiladi. Turli reyslar haqidagi ma'lumot bir-biriga bog'liqmas ravishda tasodifiy holda e'lon qilinadi. Avtovakzalga har 30 minutda o'rtacha 5 ta reys kelib to'xtaydi.

a) 30 minut ichida kelib to'xtagan avtobuslar haqidagi xabarlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing;

b) 30 minut oralig'ida uchtdan kam bo'lmagan avtobuslarning kelib to'xtashi ehtimolini toping;

c) 30 minut oralig'ida birorta ham avtobusning kelib to'xtamaslik ehtimolini toping.

192. Miltiqdan otilgan har bir o'qning samolyotga tegish ehtimoli 0,001 ga teng. 3000 ta o'q uziladi. Otilgan o'qlarning samolyotga tekkanlari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

193. Ikkita mergan galma-galdan nishonga qarata o'q uzishadi. Bitta o'q uzishda xato ketish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,2 ga, ikkinchisi uchun 0,4 ga teng. Agar 4 tadan ortiq o'q uzilmagan bo'lsa, nishonga tekkuncha otilgan o'qlar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

194. Ikkita bombardimonchi samolyot nishonga tekkuncha galma-galdan bomba tashlaydi. Birinchi samolyotning nishonni aniq mo'ljalga olish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisniki esa 0,8 ga teng. Agar samolyotlarning har birida 2 tadan bomba bo'lsa, tashlangan bombalar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

7- mavzu. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikallari va ularning xossalari

1-ta'rif. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (o'rta qiymati) deb, uning mumkin bo'lgan barcha qiymatlarini bu qiymatlar mos ehtimollariga ko'paytmasining yig'indisiga aytiladi, ya'ni⁷⁶

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami sanoqli bo'lsa, u holda

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k .$$

Bunda tenglikning o'ng tomonidagi qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, matematik kutilmasi mavjud, aks holda mavjud emas deyiladi.

Matematik kutilima quyidagi hossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi uning o'ziga teng, ya'ni

$$M(C) = C.$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilima belgisidan tashqariga koeffitsient qilib chiqarish mumkin, ya'ni

$$M(CX) = CM(X).$$

3-xossa. Tasodifiy miqdorlar algebraik yig'indisining matematik kutilmasi, ularning matematik kutilmalari algebraik yig'indisiga teng:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

4-xossa. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi, ko'paytuvchilar matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n).$$

⁷⁶ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

2-ta'rif. X tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** deb, uning matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi, ya'ni

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Dispersiyani unga ekvivalent, amaliyotda hisoblash qulay bo'lgan

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

formula yordamida ham topish mumkin. Ba'zi adabiyotlarda bu formula dispersiyaning ta'rif sifatida keltirilgan.

Dispersiya quyidagi hossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$D(C) = 0.$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini avval kvadratga oshirib, so'ng dispersiya belgisidan tashqariga koeffitsient qilib chiqarish mumkin, ya'ni

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3-xossa. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar algebraik yig'indisining dispersiyasi qo'shiluvchilar dispersiyalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

3-ta'rif. Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi, ya'ni

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

1. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

X	4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

Yechish. $M(X) = 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 7,6.$

2. Yashikda 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan tavakkaliga 1 ta shar olingan. X tasodifiy miqdor olingan oq sharlar soni bo'lsa, uning taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilmasini va dispersiyasini hisoblang.

Yechish. Tavakkaliga bitta shar olinsa, bu shar qora yoki oq bo'lishi mumkin. Demak, X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari 0 yoki 1. U holda taqsimot qonuni quyidagicha tuziladi:

X	0	1
P	5/6	1/6

X^2	0	1
P	5/6	1/6

$$\text{Demak, } M(X) = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$M(X^2) = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \quad D(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

3. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

Yechish. $M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,08 + 4 \cdot 0,02 = 1,32.$

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,08 + 16 \cdot 0,02 = 2,64.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2,64 - (1,32)^2 = 2,64 - 1,7424 = 0,8976$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,8976} = 1,3775.$$

4. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D(X)=5$, $D(Y)=6$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z=3X+2Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish.

$$D(Z)=D(3X+2Y)=D(3X)+D(2Y)=9D(X)+4D(Y)=9 \cdot 5+4 \cdot 6=69.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

195. Ushbu

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

196. X tasodifiy miqdor - o'yin kubi bir marta tashlanganda tushadigan ochkolar soni. $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

197. Qutida 7 ta shar bo'lib, ularning to'rttasi oq, qolganlari qora. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. X - olingan oq sharlar soni. $M(X)$ ni toping.

198. Ikkita o'yin kubi baravariga 2 marta tashlanadi. X - ikkala o'yin kublaridagi tushgan juft ochkolar soni. $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

199. 10 ta detaldan iborat partiyada 3 ta yaroqsiz detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X diskret tasodifiy miqdor olingan 2 ta detal orasidagi yaroqsiz detallar soni bo'lsa, uning matematik kutilmasini toping.

200. Ovchi nishonga qarata to birinchi marta tekkuncha otadi, lekin otgan o'qlarning soni 4 tadan ortmaydi. Ovchining nishonga tegizish ehtimoli 0,8 ga teng. Otilgan o'qlar sonining taqsimot qonunini tuzing va uning dispersiyasini hisoblang.

201. O'yin kubi 4 marta tashlanganda 6 ochkosining tushishi sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

202. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D(X)=4$, $D(Y)=5$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z=2X+3Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

203. X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi mos ravishda 2 va 10 ga teng. $Z=2X+5$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

204. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

205. X tasodifiy miqdor $P\{X = k\} = C_n^k P^k q^{n-k}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$ binomial taqsimot qonuniga ega bo'lsa, $M(X)$ va $D(X)$ ni toping.

206. Mergan o'q nishonga tekkuncha otadi (geometrik taqsimot), o'qning nishonga tegish ehtimoli p ga teng. Otilgan o'qlar sonining matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

207. A hodisaning bitta tajribada ro'y berish sonining matematik kutilmasi A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga tengligini isbot qiling.

208. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning mumkin bo'lgan eng kichik va eng katta qiymatlari orasida yotishini isbot qiling.

209. Ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

210. A hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng. Agar X tasodifiy miqdor - A hodisaning 5 ta erkli tajribada ro'y berishlari soni bo'lsa, u holda uning dispersiyasini toping.

211. Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

212. X tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib, $x_2 > x_1$ bo'lsin. X ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,6 ga teng. $M(X)=1,4$, $D(X)=0,24$. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

213. X tasodifiy miqdor ikkita $x_1 < x_2$ qiymatga ega. X ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,2 teng. $M(X)=2,6$, $\sigma=0,8$ bo'lsa, X ning taqsimot qonunini toping.

214. X diskret tasodifiy miqdor A hodisaning ikkita erkli tajribada ro'y berishlari soni bo'lib, uning bu tajribalarda ro'y berish ehtimoli bir xil va $M(X)=1,2$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $D(X)$ ni toping.

215. Ketma-ket ulangan 5 ta qusmdan iborat qurilmaning ishonchliligi (berilgan muddat ichida uzluksiz ishlashi) tekshirilmoqda. Ularni har birining ishonchlilik ehtimoli p ga teng bo'lib, ular bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda ishlaydi. Har bir qusmni tekshirish undan oldingisi ishonchli bo'lgandagina amalga oshiriladi. X tasodifiy miqdor tajribadagi tekshirilgan qusmlar soni bo'lsa, uning taqsimot qonunini va matematik kutilmasini toping.

216. Agar X tasodifiy miqdor faqat natural sonlar qabul qilsa, $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ tenglik o'rinli ekanligini isbotlang.

217. 45 ochkodan 6 tasi yutuqli bo'lgan "sportloto" tiraji o'tkazilmoqda. Ishtirokchi bir dona chipta sotib oldi va uni to'ldirdi. Uning k ta sonni to'g'ri topgan bo'lish ehtimolini aniqlang (bunda $k=6;5$).

218. Qurilmani yig'ish uchun 4 ta bir xil turdagi detal kerak. Omborda kerakli detallardan 10 ta bo'lib, ulardan 5 tasi ishlatish uchun yaroqli. Tavakkaliga 10 ta detaldan 5 tasi ajratib olindi (bir detal har ehtimolga qarshi zahira uchun). Qurilmani yig'ish mumkin bo'lish ehtimolini toping.

219. Ikkita svetofor o'rnatilgan yo'lda avtomashina harakatlanmoqda. Svetoforlarda bir-biriga bog'liqmas ravishda teng ehtimollik bilan qizil va yashil chiroqlar yonadi. X tasodifiy miqdor avtomashinaning birinchi marta to'xtagunicha ortda qoldirgan svetoforlari soni. Agar avtomashinani haydovchi qoidaga amal qilgan holda boshqarib borayotgan bo'lsa, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing hamda $M(X)$ va $D(X)$ larni hisoblang.

220. Archaga o'rnatilgan chiroqlar marjoni ketma-ket ulangan. Uning lampochkalaridan biri kuyib qoldi. Chiroqlar marjoni 6 ta lampochkadan tashkil topgan va X tasodifiy miqdor kuygan lampochka aniqlanguncha tekshirilayotgan lampochkalar soni bo'lsin. U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Taqsimot ko'pburchagini yasang hamda $M(X)$ va $D(X)$ larni hisoblang.

221. Ikkita kompaniya uchun mukofot puli ajratilgan bo'lib, u birinchi kompaniya uchun 10 mln. so'mni, ikkinchi kompaniya uchun esa 15 mln. so'mni tashkil qiladi. Birinchi kompaniya buyurtmani to'liq bajarsa, mukofot puliga qo'shimcha 50% ustama haq olishi, aksincha, 0,2 ehtimol bilan uni yo'qotishi e'lon qilinda. Ikkinchi kompaniya buyurtmani to'liq bajarsa, mukofot puliga qo'shimcha 40% ustama haq olishi, aksincha, 0,15 ehtimol bilan uni yo'qotishi e'lon qilinda. Bir yildan so'ng ikkala kompaniya oladigan mukofot yig'indisidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Kutilayotgan qo'shimcha o'rtacha foyda hamda risk darajasini aniqlang.

222. Tadbirkor 3 ta bankdan kredit olishi mumkin bo'lsin. 1- bankdan 10 mln. so'm miqdoridagi pul kreditini olish ehtimoli $1/3$ ga, 2-bank uchun xuddi shunday miqdordagi pul

kreditini olish ehtimoli $1/4$ ga teng. 3- bankdan 20 mln. so'm miqdoridagi pul kreditini olish ehtimoli $1/5$ ga teng. Agar banklar bir-biriga bog'liqmas ravishda ishlashi ma'lum bo'lsa, mumkin bo'lgan kredit pulidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing va sonli xarakteristikasini toping.

223. Bemorga uch turdagi dori tavsiya etilgan bo'lib, ularning samaraliligi mos ravishda 0,5; 0,7 va 0,75 ga teng. Ijobiy samara beruvchi dorilar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$ va $D(X)$ ni toping.

224. Samolyot halokatga uchragan kemani qidirish uchun parovoz qildi. Uning har parvozda kemani topish ehtimoli 0,4 ga teng. Qidirov parvozlari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$ va $D(X)$ ni toping. Samolyotning uchinchi parvozda kemani topish ehtimolini aniqlang.

225. Ishlab chiqarish jarayonida 70% dan kam bo'lmagan to'g'ri qaror qabul qiluvchi rahbar "yaxshi rahbar" bo'lib hisoblanadi. Bunday qobiliyatga ega bo'lgan bank boshqaruvchisi bank siyosati bo'yicha 4 ta muhim qaror qabul qilishi kerak. To'g'ri qaror qabul qilish ehtimoli o'zgarmas deb faraz qilgan holda, bank boshqaruvchisining to'g'ri qaror qabul qilishlari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Bank boshqaruvchisining 3 tadan kam to'g'ri qaror qabul qilish ehtimolini toping.

226. Semestr davomida o'qituvchilar tomonidan talabalar uchun maslahat soatlari tashkil etiladi. "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" fanidan maslahat soati olib boruvchi o'qituvchi belgilangan bir soat ichida maslahat soatiga keluvchi talabalar soni X tasodifiy miqdor bo'lib, o'rta hisobda 8 ta talabani tashkil qilishiga e'tibor qaratdi. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. 0,5 soat ichida maslahat soatiga 3 ta talabani tashrif buyurish ehtimolini toping.

227. Sug'urta kompaniyasining 50 yoshdan oshgan sug'urta polisiga ega bo'lgan mijozlarining 30% i sog'liqlaridan shikoyat qilib, sug'urta summasini qoplashni talab qildilar. Tekshirish maqsadida tasodifiy ravishda 50 yoshdan oshgan, sug'urta polisiga ega bo'lgan 15 kishi ajratib olindi. Shikoyat bildirgan mijozlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Ajratib olinganlardan hech bo'lmaganda 10 tasining sug'urta summasini qoplashni talab qilishi ehtimolini toping.

228. Yakuniy nazorat bo'yicha test 15 ta savoldan iborat bo'lib, har bir test savoli uchun 5 ta javob tavsiya qilingan. Tavsiya qilingan javoblarning bittasi berilgan savol uchun to'g'ri javob bo'lib hisoblanadi. Agar test topshiruvchi talaba barcha test savollari uchun to'g'ri javobni bilmasligi ma'lum bo'lsa, talabani test savollariga to'g'ri bergan javoblari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni toping. Talabani hech bo'lmaganda 10 ta test savoliga to'g'ri javob berishi ehtimoli qanday?

229. Turli reyslar bo'yicha xalqaro aeroportga samolyotlarning kelib qo'nish vaqti haqidagi ma'lumotlar elektron tabloda e'lon qilinadi. Turli reyslar haqidagi ma'lumotlarning tabloda paydo bo'lishi bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda tasodifiy ravishda yuz beradi.

Aeroportga bir soat davomida oʻrta hisobda 10 ta samolyot kelib qoʻnadi. Elektron tabloda bir soat davomida aeroportga kelib qoʻngan samolyotlar haqidagi maʼlumotlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Bir soat davomida aeroportga 3 tadan kam boʻlmagan samolyotning kelib qoʻnishi ehtimoli qanday? 15 minut davomida aeroportga bitta ham samolyotning kelib qoʻnmaslik ehtimoli-chi? (X - Puasson taqsimot qonuniga ega).

230. Shaharda transportlarning tigʻiz harakati vaqtida bir soat ichida umumiy transport vositalari uchun oʻrtacha 2 ta avtohalokat roʻy berishi aniqlangan. Ertalabki transportlarning tigʻiz harakatlanish vaqti 1,5 soat, kechki transportlarning tigʻiz harakatlanish vaqti 2 soatni tashkil qiladi. Ertalabki va kechki transportlarning tigʻiz harakatlanish vaqtida yuz bergan avtohalokatlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Biror bir kunning ertalabki va kechki transportlarning tigʻiz harakatlanish vaqtida birorta ham avtohalokatning kuzatilmaganligi ehtimolini toping. (X - Puasson taqsimot qonuniga ega).

231. Doʻkonda maʼlum bir rusumdagi 15 ta avtomobil bor. Ularning 7 tasi qora rang, 6 tasi kul rang va 2 tasi oq. Firma doʻkonga qanday rangda boʻlishidan qatʼiy nazar 3 ta avtomobil sotib olmoqchi ekanligi haqida taklif berdi. Tasodifiy ravishda tanlangan qora rangdagi avtomobillar sonidan iborat X tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. Firmaga sotilgan avtomobillardan kamida ikkitasining qora rangda boʻlishi ehtimolini toping.

232. Mijozlarning bankka tashrif buyurishlari nazariy taqsimot qonunlaridan biriga (Puasson taqsimot qonuniga) buysunadi. Har 3 minutda bankka oʻrta hisobda bitta mijozning tashrif buyurishi mumkinligini bilgan holda, 15 minut davomida bankka tashrif buyurgan mijozlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. $M(X)$, $D(X)$ ni aniqlang. 1 minut davomida hech boʻlmaganda 3 ta mijozning bankka tashrif buyurishi ehtimolini toping.

8-mavzu. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot va zichlik funksiyalari

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni har doim ham jadval ko'rinishida berilavermaydi. Masalan, uzluksiz tasodifiy miqdor uchun uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini sanab chiqish mumkin emas.

1-ta'rif. Har bir $X \in R$ uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymatlarni qabul qilish ehtimoli, ya'ni

$$F(x) = P(X < x)$$

funksiya X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi yoki **integral funksiyasi**⁷⁷ deyiladi.

Agar X diskret tasodifiy miqdor bo'lib, $x_1, x_2, x_3, \dots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, p_3, \dots$ ehtimollar bilan qabul qilsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi hossalarga ega.

$$1. 0 \leq F(x) \leq 1;$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a);$$

2.

$$3. \text{ Agar } x_1 < x_2 \text{ bo'lsa, } F(x_1) \leq F(x_2);$$

$$4. F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1.$$

2-ta'rif. X uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining differensial funksiyasi yoki **zichlik funksiyasi** deb,

$$f(x) = F'(x)$$

funksiyaga aytiladi⁷⁸.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsa, uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

⁷⁷ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

⁷⁸ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

orqali aniqlanadi.

Zichlik funksiya quyidagi hossalarga ega:

1. $f(x) \geq 0;$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari (a,b) oraliqqa tegishli bo'lib, u

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar, } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{agar, } a < x \leq b, \\ 0, & \text{agar, } x > b. \end{cases}$$

zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimlangan $R(a,b)$ tasodifiy miqdor deyiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, X tasodifiy miqdor $N(a,\sigma)$ normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi deyiladi.

Normal taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning (α, β) oraliqqa tushish ehtimoli:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

formula bo'yicha hisoblanadi, bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Laplas funksiyasi.

Agar zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar, } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{agar, } x \geq 0, \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimoti ko'rsatkichli (eksponensial) $Exp(\lambda)$ taqsimot deyiladi.

Agar uzluksiz X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_x(x)$ va unga bog'liq bo'lmagan boshqa uzluksiz Y tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_y(y)$ bo'lsa, u holda $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx$$

ga teng bo'ladi.

1. X - diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. Ko'rinib turibdiki, $x \in (-\infty; -2]$ uchun $X < x$ hodisa mumkin bo'lmagan hodisa bo'ladi, ya'ni

$$F(x) = 0$$

Endi $x \in (-2; 1]$ bo'lsin, u holda

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) = 0,1.$$

Agar $x \in (-1; 0]$ bo'lsa,

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

Huddi shuningdek, $x \in (0; 1]$ bo'lsa,

$$F(x) = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5.$$

Agar $x \in (1; 2]$ bo'lsa,

$$F(x) = 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,4 = 0,9.$$

Agar $x > 2$ bo'lsa,

$$F(x) = P(X < x) = 1,$$

chunki ixtiyoriy $x > 2$ uchun $X < x$ hodisa muqarrar hodisa bo'ladi.

Shunday qilib, $F(x)$ taqsimot funksiyaning analitik ifodasini quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -2, \\ 0.1, & \text{agar } -2 < x \leq -1, \\ 0.3, & \text{agar } -1 < x \leq 0, \\ 0.5, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 0.9, & \text{agar } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{agar } x > 2. \end{cases}$$

2. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{agar } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{agar } x > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ intervalda yotgan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. Taqsimot funksiyaning 2-xossasiga asosan:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Bu formulaga $a = 0$, $b = 1/3$ ni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$P\left(0 < X < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=\frac{1}{3}} - \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=0} = \frac{1}{4}$$

3. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sin 2x, & \text{agar } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{agar } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan, $f(x)$ zichlik funksiyani toping.

Yechish. Zichlik funksiya taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 2 \cos 2x, & \text{agar } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

4. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \cos x, & \text{agar } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

Yechish.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$$

formuladan foydalanamiz. Agar $x \leq 0$ bo'lsa, $F(x)=0$.

Demak,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dz = 0.$$

Agar $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dz + \int_0^x \cos z dz = \sin x.$$

Agar $x > \frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dz + \int_0^{\pi/2} \cos z dz + \int_{\pi/2}^x 0 dx = \sin z \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{agar } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{agar } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \frac{2}{3} \sin 3x, & \text{agar } 0 < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

formuladan foydalanamiz.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = \frac{\sqrt{2}}{9}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

233. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{agar } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{agar } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funksiyani toping.

234. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{agar } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping.

235. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3 \sin 3x, & \text{agar } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. $F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

236. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{agar } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{agar } x > 2. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. $F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

237. X uzluksiz tasodifiy miqdorning differensial funksiyasi butun Ox o'qida:

$$f(x) = \frac{4C}{e^x + e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan. C o'zgarmas parametrni toping.

238. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (Koshi taqsimot qonuni) butun Ox o'qida:

$$f(x) = \frac{2C}{1+x^2}$$

tenglik bilan berilgan. C o'zgarmas parametrni toping.

239. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $(0;1)$ oraliqda $f(x) = C \arctg x$ tenglik bilan berilgan bo'lib, bu oraliqdan tashqarida $f(x) = 0$. C o'zgarmas parametrni toping.

240. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ x^2, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{agar } x > 1. \end{cases}$$

To'rtta erkli tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning rosa 3 marta $(0,25;0,75)$ oraliqda yotadigan qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

241. X uzluksiz tasodifiy miqdor ko'rsatkichli $Exp(2)$ qonun bo'yicha taqsimlangan, ya'ni

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 2e^{-2x}, & \text{agar } x > 0, \end{cases}$$

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning $(0,3;1)$ oraliqqa tushish ehtimolini toping.

242. X tasodifiy miqdor $N(0;2)$ normal taqsimot qonuniga bo'ysunsin. X tasodifiy miqdorning $(-2; 3)$ oraliqqa tushish ehtimolini aniqlang.

243. X tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ A \sin x, & \text{agar } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{agar } x > \pi. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan.

- a) A ni aniqlang;
- b) taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni toping;
- c) $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalarining grafigini chizing.

244. X uzluksiz tasodifiy miqdor $N(20;5)$ normal taqsimot qonuniga bo'ysunsin. Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning $(15;25)$ oraliqda joylashgan qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

245. X tasodifiy miqdor $R[0;2]$ kesmada tekis taqsimot qonuniga ega. a) $0 < X < 0,5$ hodisaning ehtimolini toping; b) $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizing.

246. X tasodifiy miqdor $N(30;10)$ normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi. X tasodifiy miqdorning $(10;50)$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

247. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan. Uning o'rtacha kvadratik chetlanishi 0,4 ga teng. Tasodifiy miqdorning absolyut qiymati bo'yicha matematik kutilmasidan chetlanishi 0,3 dan kichik bo'lishi ehtimolini toping.

248. X tasodifiy miqdor Koshi taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan, ya'ni

$$F(x) = b + C \arctg \frac{x}{a}$$

bunda $x \in (-\infty; +\infty)$. Bu taqsimot qonuni uzliksiz bo'lishi uchun a , b va C koeffitsentlarni qanday tanlash kerak?

249*. X va Y tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog'liq bo'lmagan, bir xil $R[-1;+1]$ tekis taqsimlangan taqsimot qonuniga ega. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping va u qanday taqsimot qonuniga mos kelishini aniqlang.

250*. X va Y tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog'liq bo'lmagan, bir xil $F(x)$ taqsimot funksiyasi bilan ifodalanuvchi qonunga ega. $U=\min\{X,Y\}$, $V=\max\{X,Y\}$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini toping.

251*. X va Y tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog'liq bo'lmagan, mos ravishda $Exp(\lambda_1)$, $Exp(\lambda_2)$ ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimot qonuniga ega. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunining zichlik funtsiyasini toping.

252*. X va Y tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog'liq bo'lmagan, mos ravishda $Exp(\lambda_1)$, $Exp(\lambda_2)$ ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimlangan taqsimot qonuniga ega. $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunining zichlik funksiyasini toping.

9-mavzu. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Uzluksiz tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlarini butun son o'qida qabul qilsin, u holda $f(x)$ funksiya uning zichlik funksiyasi bo'lsin.

Agar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$$

integral mavjud bo'lsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

integral X uzluksiz tasodifiy miqdorning **matematik kutilmasi**⁷⁹ deyiladi, ya'ni

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx.$$

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari $(a; b)$ oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda

$$M(X) = \int_a^b xf(x) dx$$

bo'ladi.

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari Ox o'qida yotsa, uning dispersiyasi

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$$

yoki

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \right]^2$$

tengliklar orqali aniqlanadi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari $(a; b)$ oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda

⁷⁹ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр.

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - \left[\int_a^b x f(x) dx \right]^2$$

Eslatma. Matematik kutilma va dispersiyaning diskret tasodifiy miqdorlar uchun xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o‘rinli.

Tasodifiy miqdorning **o‘rtacha kvadratik chetlanishi** ⁸⁰ deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}.$$

aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari uchun quyidagi $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x) dx$ integral chekli bo‘lsa, u holda

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

k- tartibli moment mavjud deyiladi⁸¹.

X tasodifiy miqdorning p - tartibli kvantilli deb,

$$\begin{cases} P(X \leq x) \geq p, \\ P(X \geq x) \geq 1 - p, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining eng kichik ildiziga aytiladi va uni X_p orqali belgilanadi. Agar tenglamaning yechimi butun bir oraliqni tashkil qilsa, u holda kvantill oraliqning quyi chegarasiga teng deb olinadi.

1. $Exp(\lambda)$ ko‘rsatkichli (eksponensial) taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo‘lib, taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

bo‘lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning:

a) zichlik funksiyasini;

⁸⁰ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

⁸¹ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.

- b) matematik kutilmasini;
c) dispersiyasini toping.

Yechish. Ta'rifga asosan,

a)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \lambda > 0. \end{cases}$$

b) Matematik kutilma ta'rifga asosan:

$$\begin{aligned} M(X) &= \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u, du = dx \\ v = \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right\} = \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

c) Dispersiyaning ta'rifga asosan:

$$\begin{aligned} D(X) &= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = u, du = 2x dx \\ v = \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right\} = \\ &= \lambda \left[-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x} dx \right] - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

2. $N(a, \sigma)$ normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechish. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ta'rifga ko'ra:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Integralni hisoblash uchun yangi $z = \frac{x-a}{\sigma}$ o'zgaruvchi kiritamiz. U holda

$$x = \sigma z + a, \quad dx = \sigma dz.$$

bo'ladi. Yangi integrallash chegaralari oldingisiga tengligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz.

$$M(X) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Qo'shiluvchilardan birinchisi nolga teng (integral belgisi ostida toq funksiya, integrallash chegaralari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik). Qo'shiluvchilardan ikkinchisi Puasson integralining qiymati

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi},$$

ekanligini hisobga olsak,

$$M(X) = a.$$

Uzlusiz tasodifiy miqdor dispersiyasi ta'rifiga ko'ra, $M(X) = a$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Yuqoridagiga o'xshash, $z = \frac{x-a}{\sigma}$ yangi o'zgaruvchi kiritamiz. Bundan

$$x - a = \sigma z, \quad dx = \sigma dz.$$

U holda

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ni hosil qilamiz. Bo‘laklab integrallash natijasida $D(X) = \sigma^2$ ni topamiz.

Demak,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma.$$

Shunday qilib, normal taqsimlangan tasodifiy miqdor a va σ parametrlarining ehtimoliy ma’nosi quyidagicha:

$$M(X) = a; \quad D(X) = \sigma^2.$$

3. Ushbu taqsimot funksiyasi bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ x^2, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{agar } x > 1. \end{cases}$$

Yechish. Zichlik funksiyasini topamiz.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Matematik kutilmasi:

$$M(X) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Dispersiyasi:

$$D(X) = 2 \int_0^1 x^3 dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{5}{18}.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

253. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{3x^2}{8}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Matematik kutilmasi va dispersiyani hisoblang.

254. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3 \sin 3x, & \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

255. Zichlik funksiyasi $f(x) = 10e^{-10x}$ ($x \geq 0$) bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilmasi, dispersiyasi, o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

256. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0.5 \cos x, & \text{agar } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

257. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 2, \\ 0.5, & \text{agar } 2 < x \leq 4, \\ 0, & \text{agar } x > 4. \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

258. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{agar } x \geq 0. \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

259. Agar $M(X)=3$, $D(X)=16$ ekanligi ma'lum bo'lsa, normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

260. X uzluksiz tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 2x, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{agar } x > 1. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

261. (2;8) oraliqda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

262. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ 0,004e^{-0,004x}, & \text{agar } x \geq 0. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni toping.

263. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. $M(X)$, $D(X)$ larni toping

264. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$$

X ning matematik kutilmasini toping.

265. X tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{agar } x \leq 0, \\ 0, & \text{agar } x > 0. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. $M(X)$ va $D(X)$ larni toping.

266. X tasodifiy miqdor

$$f(x) = Ax^2 e^{-\lambda x} \quad (\lambda > 0, 0 \leq x < \infty)$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. Taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni toping.

267. X tasodifiy miqdor

$$F(x) = A + B \arctg x \quad (-\infty < x < \infty)$$

taqsimot funksiyasiga ega.

- a) A va B o'zgarmas sonlarni toping;
- b) $f(x)$ zichlik funksiyasini toping;
- c) $M(X)$ ni toping.

268. X tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} A \cos x, & \text{agar } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{agar } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan.

- a) A koeffitsientini toping;
- b) $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping;
- c) $M(X)$ va $D(X)$ ni toping.

269. X tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} \cos^2 x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. $M(X)$ va $D(X)$ larni toping.

270. X tasodifiy miqdor tekis taqsimot qonuniga bo'ysunadi. $M(X)=4, D(X)=3$. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

271. X tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiya bilan berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$M(X)$ ni toping.

272. X tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiya bilan berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

a) A koefitsientini toping.

b) $M(X)$ ni toping.

273. X tasodifiy miqdor Laplas taqsimot qonuniga ega bo'lib, zichlik funksiyasi quyidagicha

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

Bu yerda α - ixtiyoriy haqiqiy son. $M(X)$ va $D(X)$ larni toping.

274. X tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Axe^{-\lambda^2 x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

zichlik funksiyasiga ega.

a) A koefitsientni toping;

b) $M(X)$ va $D(X)$ larni toping.

275. X tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyasiga ega.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4}, & 0 < x \leq 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

$M(X)$ ni toping.

276. X tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyasiga ega.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6, & 2 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

$M(X)$ ni toping.

277. X tasodifiy miqdor $(-a, a)$ oraliqda

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. Bu oraliqdan tashqarida $f(x)=0$. X tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

278. Koshi taqsimot qonunining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

berilgan. Bu taqsimotning matematik kutilmasi va yuqoriroq tartibli momentlari mavjudmi?

279. Tekshirilayotgan X tasodifiy miqdor $N(10,5)$ qonuniyatga bo'ysunadi. p ehtimollik bilan matematik kutilmasiga nisbatan simmetrik mumkin bo'lgan qiymatlar oralig'ini toping. $p=0.9974$, $p=0.9544$, $p=0.5$ larda hisoblang.

280. Shokolad qutisi avtomatik ravishda qadoqlanadi va ularning o'rtacha massasi 1,06 kg. Qutilardan 5% ining og'irligi 1 kg dan kamligi ma'lum bo'lsa, qancha foyiz qutilar 940 grammdan og'ir bo'ladi.

281. X tasodifiy miqdor $N(1;\sigma)$ qonuniyatga ega hamda $P(X < 2) = 0.99$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $M(X^2)$ va $P(X^2 > 2)$ ni hisoblang.

282. X tasodifiy miqdor $N(a;\sigma)$ qonuniyatga ega hamda (a,b) – oraliq $M(X)$ matematik kutilmani o'z ichiga olmaydi.

a) $Q(\sigma) = P(a < X < b)$ bo'lsa, σ ning qanday qiymatida u maksimal bo'ladi;

b) $M(|X - M(X)|)$ ni hisoblang.

283. Shaxtada kunlik ko'mir qazib olish $N(a,\sigma)$ normal taqsimlangan taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Agar $a=785$ t.ga, $\sigma=60$ t.ga teng bo'lsa, muayyan bir kun davomida kamida 800 t ko'mir qazib chiqarilishi ehtimolini toping. 750 t dan 850 t gacha ko'mir ish kunining qancha qismida qazib chiqariladi?

284. Issiqxonada yetishtirilgan tropik greyfrut mevasining og'irligi normal taqsimlangan taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Uning matematik kutilmasi noma'lum bo'lib, dispersiyasi 0,04 ga teng. Agronom yetishtiriladigan tropik mevaning 65% ining og'irligi 0,5

kg.dan oshmasligini biladi. Tasodiy ravishda tanlangan greyfrutning kutilayotgan og'irligini aniqlang.

285. Joriy yil uchun bankning foiz stavkasi haqidagi tahlilchining bashorati $N(a, \sigma)$ normal taqsimlangan taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Agar $a=9\%$ ga, $\sigma=2,6\%$ ga teng bo'lsa, tahlilchilar guruhidan tasodifan tanlab olingan bitta tahlilchining bashoratiga ko'ra, foiz stavkasining darajasi a) 11% ga ortiq, b) 14% dan kam, c) 12% dan 15% gacha bo'lishi ehtimolini toping.

286. Biror bir kompaniya aksiyasining yil davomidagi bahosi $N(a, \sigma)$ normal taqsimlangan taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Agar $a=48$ sh.p.b.ga, $\sigma=6$ ga teng bo'lsa, tahlil qilinayotgan davr oralig'ida tasodifiy tanlangan kundagi aksiya bahosining a) 60 sh.p.b.dan ortiq, b) 60 sh.p.b. dan kam, c) 40 sh.p.b. bilan 50 sh.p.b. oralig'ida bo'lishi ehtimolini toping.

10-mavzu. Katta sonlar qonuni

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatini oldindan aytish mumkin emas, ya'ni u tasodifiy qiymat qabul qiladi. Lekin amaliyotda ko'pincha ko'p sonli tasodifiy miqdorlar yig'indisi o'zining tasodifiylik xususiyatini yo'qotib borar ekan. Amaliyot uchun esa ko'p tasodifiy sabablarning birgalikda ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib kelinishi katta ahamiyatga ega, chunki bu tasodifiy hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi.

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin va bu tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari mavjud bo'lib, ular mos ravishda $a_1, a_2, \dots, a_n$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun **katta sonlar qonuni o'rinli** deyiladi.

Bu ta'rifning ma'nosi: n ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

tasodifiy miqdorni tasodifiy bo'lmagan

$$a = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

son bilan almashtirish mumkin ekanligidadir.

Katta sonlar qonuni bo'yicha qilingan dastlabki fundamental kashfiyotlar rus akademigi P. L. Chebishev nomi bilan chambar-chas bog'langan. Bu sohada qilingan kashfiyotlarning deyarli barchasini isbotlash jarayonida Chebishev tengsizliklari yetakchi rol o'ynaydi.

1-teorema(Chebishev tengsizligi). Musbat aniqlangan X tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun quyidagi munosabat har doim o'rinli

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Bu teoremadan qator natijalar kelib chiqadi

1-natija.

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

2-natija.

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

2-teorema. (Chebishev katta sonlar qonuni haqida). $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o'zaro erkli bo'lib, ularning har biri C soni bilan chegaralangan dispersiyaga ega bo'lsa, u holda berilgan ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - M(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

3-teorema. (Bernulli katta sonlar qonuni haqida). n ta erkli tajribada A hodisaning ro'y berishlari soni μ bo'lsin, har bir tajribada A hodisa o'zgarmas p ehtimol bilan ro'y bersin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu teoremaning ma'nosi quyidagicha: n yetarlicha katta bo'lganda $\frac{\mu}{n}$ ni istalgan aniqlik bilan

p ga teng, deb olish mumkin, ya'ni $\frac{\mu}{n}$ ning qiymatlari p ehtimol atrofida joylashgan bo'ladi.

Bundan tashqari, bu teorema tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda nisbiy chastota nima uchun turg'unlik hossasiga ega bo'lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta'rifini asoslaydi.

1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, X_n tasodifiy miqdor $-n, 0, n$ qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{n^2}, 1 - \frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^2} (n > 1)$ ehtimollar bilan qabul qilsin. Shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi-mi?

Yechish. Chebishev teoremasidan foydalanamiz.

$$M(X_n) = -n \cdot \frac{1}{n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2}\right) + n \cdot \frac{1}{n^2} = 0.$$

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2}\right) + n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 2.$$

Ko‘rinib turibdiki, hamma tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi bir xil. Demak, ular yagona son bilan chegaralangan bo‘ladi. Chebishev teoremasining shartlari bajarilganligi sababli, bu ketma-ketlikka katta sonlar qonunini tadbiq qilsa bo‘ladi.

2. A hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Agar 100 ta erkli tajriba o‘tkaziladigan bo‘lsa, A hodisaning ro‘y berishlari soni 40 dan 60 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

Yechish. X tasodifiy miqdor qaralayotgan A hodisaning 100 ta erkli tajribada ro‘y berishi sonining matematik kutilmasini va dispersiyasini topamiz:

$$M(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Hodisa ro‘y berishining berilgan soni bilan $M(X)=50$ matematik kutilmasi orasidagi maksimal ayirmani topamiz.

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10$$

va quyidagi Chebishev tengsizligidan foydalanamiz:

$$P(|X - M(X)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Bunga $M(X)=50$, $D(X)=25$, $\varepsilon > 10$ ni qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$P(|x - 50| \leq 10) \geq 1 - \frac{25}{10^2} = 0,75.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

287. Agar $D(X)=0,001$ bo'lsa, $|X-M(X)|<0.1$ ning ehtimolini Chebishev tengsizligi bo'yicha baholang.

288. Quyidagilar berilgan: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 0.9$, $D(X)=0.004$. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ε ni toping.

289. Biror punktda shamolning o'rtacha tezligi 16 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 80 km/s dan oshmasligi ehtimolini baholang.

290. Toshkent shahrining bitta rayonida elektrenergiyaning o'rtacha sarfi may oyida 360000 kw/s. May oyida elektrenergiya sarfining 1000000 kw/s dan oshmasligi ehtimolini baholang.

291. Aholi punktida 1 kunda suvning o'rtacha sarfi 50000 litr. Bir kunda suv sarfining 150000 litrdan oshmasligi ehtimolini baholang.

292. X tasodifiy miqdor uchun $M(X)=1$ va $\sigma(X)=0.2$ ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, $0.5<X<1.5$ tengsizlik ehtimolini baholang.

293. Agar $D(X)=0,004$ bo'lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X-M(X)|<0,2$ ning ehtimolini baholang.

294. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

$$\begin{array}{l} X: \quad 0,3 \quad 0,6 \\ P: \quad 0,2 \quad 0,8 \end{array}$$

$|X-M(X)|<0,2$ ni baholang hamda bahoni aniq ehtimol bilan solishtiring.

295. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi $X_1, X_2, \dots, X_n$ taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{l} X_n: \quad -n\alpha \quad 0 \quad n\alpha \\ P: \quad \frac{1}{2n^2} \quad 1-\frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{2n^2} \end{array}$$

Bu ketma-ketlikka katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasini qo'llash mumkin-mi?

296. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi $X_1, X_2, \dots, X_n$ taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{l} X_n: \quad a \quad -a \\ P: \quad \frac{n}{2n+1} \quad \frac{n+1}{2n+1} \end{array}$$

Bu ketma-ketlikka katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasini qo'llash mumkin-mi?

297. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi $X_1, X_2, \dots, X_n$ taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{l} X_n: \quad -n\alpha \quad 0 \quad n\alpha \\ P: \quad \frac{1}{2^n} \quad 1-\frac{1}{2^{n-1}} \quad \frac{1}{2^n} \end{array}$$

Bu ketma-ketlikka katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasini qo'llash mumkin-mi?

298. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi $X_1, X_2, \dots, X_n$ taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{l} X_n : -\sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3} \\ P : \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \end{array}$$

Bu ketma-ketlikka katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasini qo'llash mumkin-mi?

299. X diskret tasodifiy ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{l} X: \quad 0.3 \quad 0.5 \\ P: \quad 0.6 \quad 0.4 \end{array}$$

$|X - M(X)| < 0,3$ ni baholang. Bahoni aniq ehtimol bilan solishtiring.

300. Agar $D(X) = 0,002$ bo'lsa, $|X - M(X)| < 0,2$ ning ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

301. Ma'lum bir joyda bir yilda o'rtacha 75 kun quyoshli bo'ladi. Bu joyda bir yilda quyoshli kunlarni 200 kundan ko'p bo'lmalik ehtimolini baholang.

302. Avtoparkdagi avtobuslarning o'rtacha 5 tasi har oyning oxirida ta'mirlashga jo'natiladi. Agar A oy oxirida avtoparkning ko'pi bilan 15 ta avtobusi ta'mirlashga jo'natilishi hodisasi bo'lsa, u holda bu hodisaning ehtimolini:

- a) dispersiya haqida ma'lumot noma'lum bo'lgan holda;
- b) dispersiya 4 ga teng bo'lgan holda baholang.

303. Simmetrik tanga tashlanganida gerb tomoni tushishlar sonining chastotasi $(0,4; 0,6)$ oraliqga tushishi ehtimoli 0,975 dan kichik bo'lmaligi uchun kamida necha marotaba tanga tashlanishi kerak? (Chebishev tengsizligini qo'llang).

304. Yashikdagi oq va qora sharlar soni 3:2 kabi nisbatda. Har gal yashikdan bittadan shar olinib uning rangi e'lon qilinganidan so'ng yana yashikka qaytarib solinadi. Oq sharlar chiqishi sonining nisbiy chastotasi har bir tajribada oq shar chiqish ehtimolidan $\varepsilon = 0,05$ ga farq qilmaslik ehtimoli 0,9948 dan kam bo'lmaligi uchun kamida necha marotaba shar olish tajribasini o'tkazish kerak? (Chebishev tengsizligini qo'llang).

305. X tasodifiy miqdor biror fizik jismni o'lchash natijasi bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi 0,1 ga va o'rtacha kvadratik chetlanishi 0,02 ga teng. 0,95 ehtimollik bilan quyidagi hollarda o'lchov nisbiy aniqligida mumkin bo'lgan kafolatni (ε) toping (o'lchov nisbiy aniqligi deb, $\left| \frac{X - M(X)}{M(X)} \right|$ munosabat tushiniladi):

- a) bir marotaba o'lchanganda;
- b) 5 marotaba o'lchanib, o'lchov qiymati sifatida o'rta arifmetik olinganda.

306. Yuqoridagi masalani 100 marta o'lchash o'rta arifmetigi uchun hisoblang va natijani markaziy limit teoremani qo'llash mumkin, deb topilgan qiymat bilan solishtiriring.

307. Shahar aholisining oylik o'rtacha daromadi 400 ming so'mni tashkil qiladi. Uning o'rtacha kvadratik chetlanishi 100 ming so'm. Tasodifiy ravishda tanlab olingan 100 kishining o'rtacha daromadi 350 mingdan 450 minggacha bo'lish ehtimolini baholang.

308. 400 ta tajribaning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, hodisaning ro'y berishlar soni bilan hodisaning ro'y berishlari o'rtacha soni orasidagi farqi 20 dan ko'p bo'lmaslik ehtimolini baholang.

309. Elektr lampaning yaroqlilik muddati ko'rsatkichli taqsimot bo'yicha taqsimlangan bo'lib, matematik kutilmasi 1000 soatga teng. 100 ta lampa uchun o'rtacha yaroqlilik muddati 900 soatdan kam bo'lmaslik ehtimolini baholang.

II-QISM. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

11-mavzu. Tanlamaning statistik taqsimoti. Empirik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma

Tasodifiy hodisalar ustida o'tkaziladigan kuzatish natijalariga asoslanib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash mumkin. Matematik statistikaning asosiy vazifasi kuzatish natijalarini (statistik ma'lumotlarni) to'plash, ularni guruhlariga ajratish va qo'yilgan masalaga muvofiq ravishda bu natijalarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqishdan iboratdir.

Biror X tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega, deylik. X tasodifiy miqdor ustida o'tkazilgan n ta tajriba (kuzatish) natijasida olingan $X_1, X_2, \dots, X_n$ qiymatlar to'plamiga n hajmli tanlanma deyiladi, $X_1, X_2, \dots, X_n$ qiymatlarni bir-biriga bog'liq bo'lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Ba'zan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanma $F(x)$ nazariy taqsimot funksiyaga ega bo'lgan bosh to'plamdan olingan, deb ham ataladi.

Faraz qilaylik, $x_1, x_2, \dots, x_n$ berilgan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanmaning mos ravishdagi kuzatish natijasi bo'lsin va $x_{(1)}^* < x_{(2)}^* < \dots < x_{(k)}^*$ tanlanma kuzatish natijasi uchun qurilgan variatsion qator $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ ning bir-biridan farq qiluvchi elementlaridan tuzilgan yangi qator bo'lsin, ya'ni $x_{(1)}^*$ qiymat n_1 marta, $x_{(2)}^*$ qiymat n_2 marta, va hokazo, kuzatilgan bo'lsin. U holda kuzatilgan $x_{(i)}^*$ qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i **chastotalar**⁸² deb ataladi. Kuzatishlar sonining tanlanma hajmiga nisbatini

$$w_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning **statistik taqsimoti** deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi.

Shunday qilib, taqsimot deganda, ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Aytaylik, X tasodifiy miqdor ustida o'tkazilgan tajriba natijalari (tanlanma) uchun chastotalarning statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x -tajriba natijalarining (tanlanma elementlarining) x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni (x dan kichik variantalar soni); n – kuzatishlarning umumiy soni (tanlanma hajmi) bo'lsin, u holda taqsimotning **empirik funksiyasi** (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, har bir x qiymati uchun $\{X < x\}$ hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga, ya'ni

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

⁸² Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр

ga aytiladi. Tanlanmaning statistik taqsimotini ko'rgazmali tasvirlash hamda kuzatilayotgan X miqdorning taqsimot qonuni haqida aniqroq tasavvur hosil qilish uchun **poligon** va **gistogramma**, deb ataluvchi grafiklardan foydalaniladi.

Chastotalar **poligoni** deb, $(x_{(1)}^*, n_1), (x_{(2)}^*, n_2), \dots, (x_{(k)}^*, n_k)$ nuqtalarni ketma-ket kesmalar bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan siniq chiziqli grafikka aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, $(x_{(1)}^*, w_1), (x_{(2)}^*, w_2), \dots, (x_{(k)}^*, w_k)$ nuqtalarni ketma-ket kesmalar bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan siniq chiziqli grafikka aytiladi.

Chastotalar **gistogrammasi**⁸³ deb, asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ (chastota zichligi) nisbatlarga teng bo'lgan va ketma-ket joylashtirilgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat shakliga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo'lgan va ketma-ket joylashtirilgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat shaklga aytiladi.

1. $n=30$ hajmli bo'lgan tanlanmaning chastotalar taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo'lamiz.

$$w_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \quad w_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \quad w_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Demak, nisbiy chastotalar taqsimoti quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish.

⁸³ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 15 + 25 = 50$$

$$w_1 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0,2; \quad w_2 = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3; \quad w_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

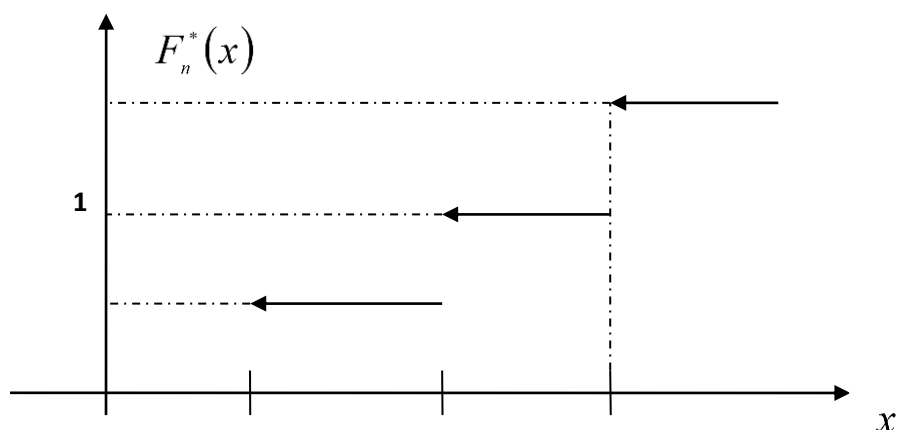
Demak, nisbiy chastotalar taqsimoti:

x_i	1	4	6
w_i	0,2	0,3	0,5

Empirik taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 1; \\ 0,2, & \text{agar } 1 < x \leq 4; \\ 0,5, & \text{agar } 4 < x \leq 6; \\ 1, & \text{agar } x > 6. \end{cases}$$

Endi empirik taqsimot funksiyasining grafigini yasaymiz.

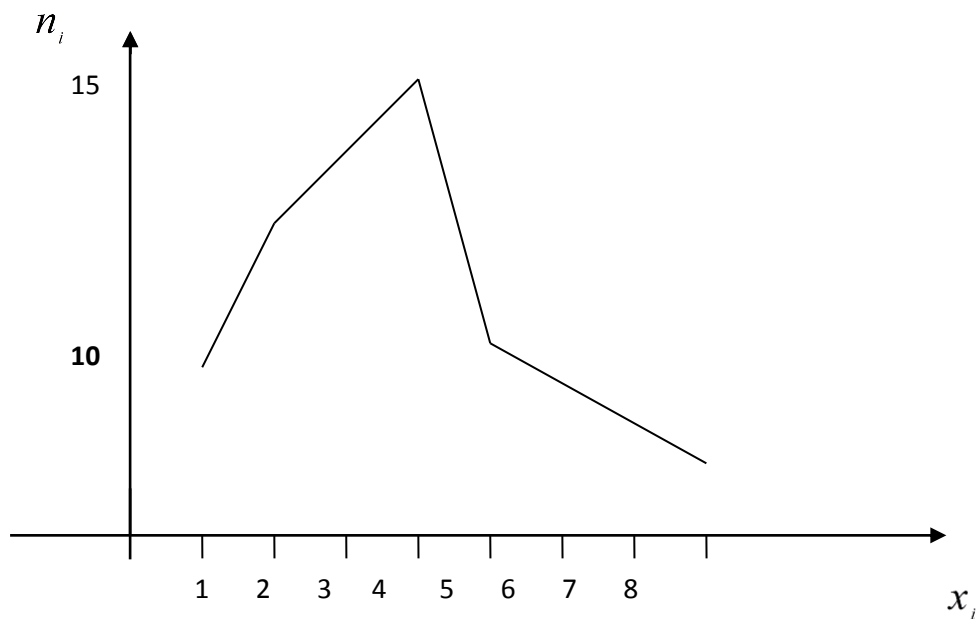


11.1-chizma

3. Berilgan tanlanma taqsimoti boyicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

Yechish. $n = 5 + 10 + 15 + 7 + 3 = 40$ tanlanma hajmi. Chastotalar poligoni quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



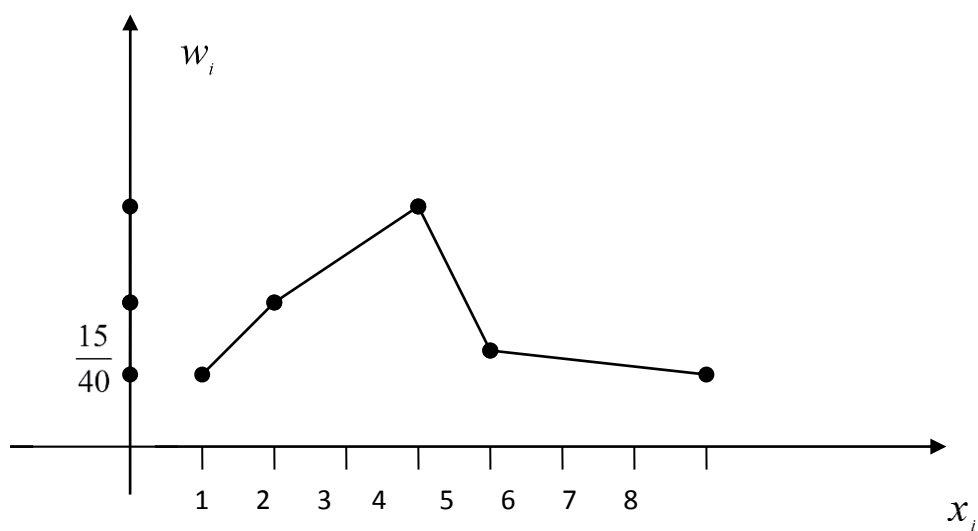
11.2-chizma

Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$w_1 = \frac{5}{40}; \quad w_2 = \frac{10}{40}; \quad w_3 = \frac{15}{40}; \quad w_4 = \frac{7}{40}; \quad w_5 = \frac{3}{40};$$

x_i	1	2	4	5	8
w_i	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

Nisbiy chastotalar poligoni quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

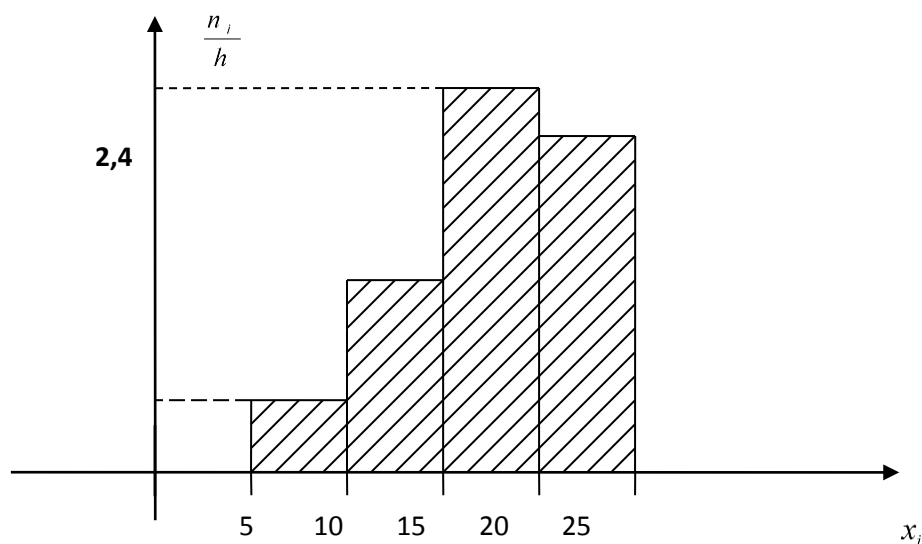


11.3-chizma

4. Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

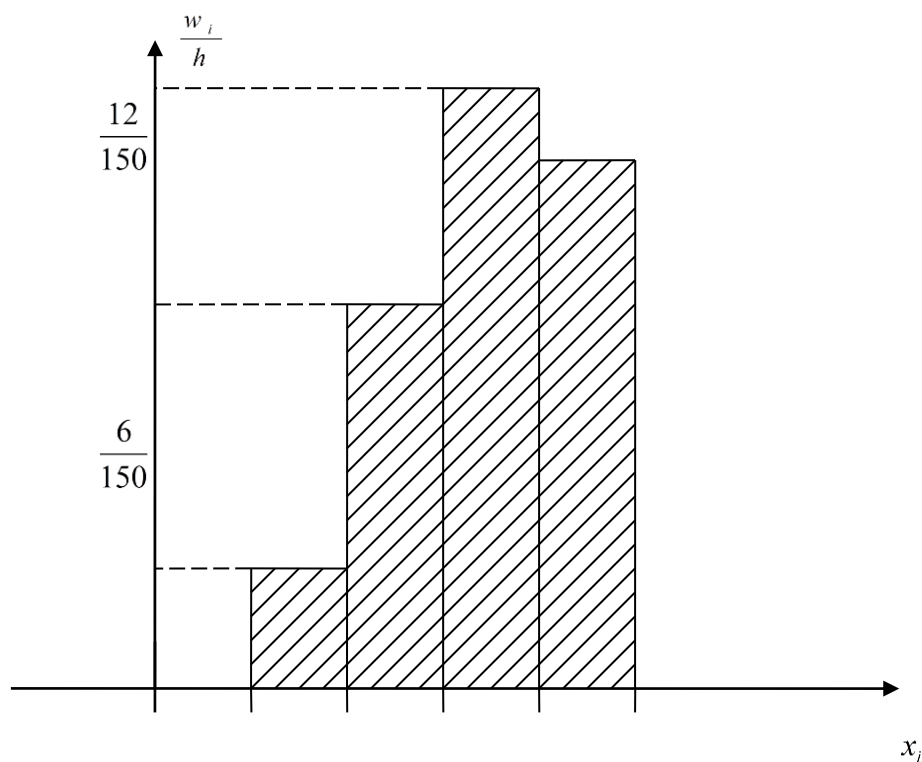
Interval ro'yxati	Qisman interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig'indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h	w_i	w_i/h
1	5-10	2	0.4	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{150}$
2	10-15	6	1.2	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{150}$
3	15-20	12	2.4	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{150}$
4	20-25	10	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{150}$

Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



11.4- chizma

Nisbiy chastotalar gistogrammasi esa quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



11.5-chizma

5. Quyida berilgan tanlanma jadvali uchun variatsion qator tuzing va ko'rsatilgan interval bo'yicha gistogramma yasang. Bunda $n=40$, $h=2$ deb olinsin.

15,9; 14,0; 16,3; 10,0; 18,8; 14,1; 15,3; 17,0; 13,9; 14,6;
 12,6; 14,2; 17,2; 13,3; 15,1; 16,1; 12,1; 14,7; 16,8; 15,5;
 14,5; 17,7; 20,0; 14,3; 14,9; 11,5; 14,7; 14,5; 15,7; 15,3;
 18,3; 15,8; 17,5; 14,8; 15,6; 17,9; 14,7; 14,9; 14,6; 13,7.

Yechish. Variatsion qator tuzamiz.

10,0<11,5<12,1<12,6<13,3<13,7<13,9<14,0<14,1<14,2<14,3<
 <14,5=14,5<14,6=14,6<14,7=14,7=14,7<14,8<14,9=14,9<15,1<15,3=<
 =15,3<15,5<15,6<15,7<15,8<15,9<16,1<16,3<16,8<17,0<17,2<17,5<
 <17,7<17,9<18,3<18,8<20,0.

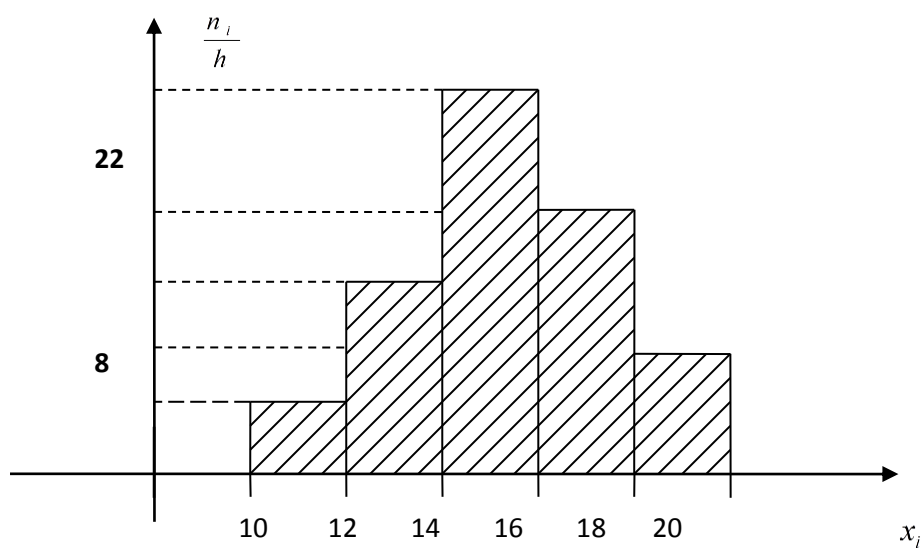
$$x_{(1)} = 10, \quad x_{(40)} = 20;$$

$$k = \frac{x_{(40)} - x_{(1)}}{h} = 5;$$

Demak, 5 ta teng oraliq bo'yicha gistogrammalar jadvalini yasaymiz.

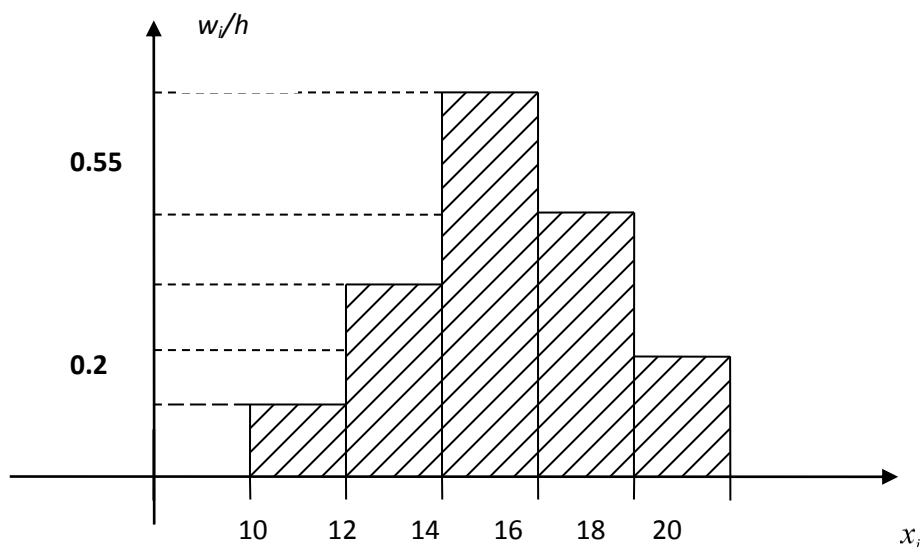
I	II	III	IV	V	VI
1	10-12	2	1	0,05	0,025
2	12-14	5	2,5	0,125	0,0625
3	14-16	22	11	0,55	0,275
4	16-18	8	4	0,2	0,1
5	18-20	3	1,5	0,075	0,0375

Gistogrammalar jadvali bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasaymiz.



11.6-chizma

Nisbiy chastotalar gistogrammasi qiyidagi ko'rinishda bo'ladi.



11.7-chizma

Mustaqil yechish uchun masalalar

310. Quyidagi tanlanma berilgan.

2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3.

- variatsion qatorni tuzing.
- chastotalar jadvalini tuzing.
- nisbiy chastotalar poligonini chizing.

311. Korxona ishchilaridan tavakkaliga 20 kishi tanlangan va ularning ta'rif razryadlari haqida quyidagi ma'lumotlar olingan.

1, 2, 4, 6, 3, 4, 4, 2, 6, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 4, 2, 5, 4, 3.

Bu ma'lumotlarga asoslangan holda:

- tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang.
- empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini yasang.

312. Tanlanma

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'rinishda berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

313. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

314. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini yasang.

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

315. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	2	4	5	7	10
w_2	0.15	0.2	0.1	0.1	0.45

316. Quyidagi ma'lumotlar asosida empirik taqsimot funksiyasini toping va grafigini yasang.

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

317. Chastotalar poligonini yasang.

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

318. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	20	40	65	80
w_2	0.1	0.2	0.3	0.4

319. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro'yhati	Qismaniy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi	Chastota zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	2-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

320. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro'yhati	Qismaniy interval	Qismaniy intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0-2	20
2	2-4	30
3	4-6	50
$n = \sum n_i = 100$		

321. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro'yhati	Qismaniy interval	Qismaniy intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4
4	11-14	5
$n = \sum n_i = 100$		

322. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	1	4	5	8	9
w_2	0.15	0.25	0.3	0.2	0.1

323. Quyidagi ma'lumotlar asosida empirik taqsimot funksiyasini toping.

x_i	2	5	7
w_2	3	2	5

324. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	5	10	12	20
w_2	0.1	0.2	0.3	0.4

325. Tanlanma

x_i	3	7	8	10
w_2	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'inishida berilgan. Empirik taqsimot funksiyasini toping va grafigini chizing.

Quyidagi 326-328- masalalarda variatsion qator tuzing va ko'rsatilgan interval uzunligi bo'yicha gistogramma yasang.

326. Quyida detallar partiyasining o'lchovini standart o'lchovdan farqi (*mm*) keltirilgan:

17;	21;	8;	20;	23;	18;	22;	20;	17;	12;
20;	11;	9;	19;	20;	9;	19;	17;	21;	13;
17;	22;	22;	10;	20;	20;	15;	19;	22;	20;
13;	21;	21;	9;	14;	11;	19;	18;	23;	19.

$n=40$, $h=2$ deb olinsin.

327. Diodlar partiyasining (*nanosekundda*) tiklanish vaqti berilgan:

69;	73;	70;	68;	61;	73;	70;	72;	67;	70;
66;	70;	76;	68;	71;	71;	68;	70;	64;	65;
72;	70;	70;	69;	66;	70;	77;	69;	71;	74;
72;	72;	72;	68;	70;	67;	71;	67;	72;	69;
66;	75;	76;	69;	71;	67;	70;	73;	71;	74.

$n=50$, $h=3$ deb olinsin.

328. Partiyadagi bir xil kimyoviy moddaning reaksiyasi davomiyligi (*sekundda*) berilgan:

8.5;	7.1;	6.7;	6.2;	2.9;	4.4;	6.0;	5.8;	5.4;	8.2;
6.9;	6.5;	6.1;	3.8;	6.0;	6.0;	5.6;	5.3;	7.7;	6.8;
6.5;	6.1;	4.2;	4.7;	5.6;	5.4;	5.3;	7.4;	6.7;	6.4;
6.1;	4.5;	6.0;	5.8;	5.6;	5.1.				

$n=36$, $h=1$ deb olinsin.

329. Oilalarning o'rtacha daromadi haqidagi quyidagi tanlanma jadval asosida nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing va chastotalar gistogrammasini chizing.

Oilaning o'rtacha oylik daromadi, (kishi boshiga sh.p.b.)	75 gacha	75-100	100-125	125-150	150-175	175-200	200 va undan yuqori
Kuzatilgan oilalar soni	46	236	250	176	102	78	12

12- mavzu. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Tanlanmaning asosiy sonli xarakteristikalar

X tasodifiy miqdorli bosh to'plamning taqsimot funksiyasi $F(x, \theta)$ bo'lib, θ - noma'lum parametr bo'lsin. $x_1, x_2, \dots, x_n$ esa bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'lsin. Tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **statistika**⁸⁴ deyiladi.

Noma'lum parametrning taqribiy qiymati sifatida olingan har qanday statistika $L = L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ parametrning bahosi deyiladi va u shu parametr belgilangan harfning ostiga n ko'rsatkichi qo'yib belgilanadi, masalan $\theta_n = L(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Tanlanma elementlarining o'rta arifmetigi

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

tanlanma **o'rtacha** deyiladi.

Tanlanma elementlarining

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

ko'rinishdagi funktsiyasi tanlanma **dispersiya** deyiladi.

Agar baho uchun $M(\theta_n) = \theta$ shart bajarilsa, θ_n baho θ parametr uchun **siljimagan** baho deyiladi.

Agar θ_n baho uchun har qanday $\varepsilon > 0$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n - \theta| > \varepsilon) = 0$ shart bajarilsa, ya'ni θ_n baho θ ga ehtimol bo'yicha yaqinlashsa, $\theta_n \xrightarrow{P} \theta$, u holda θ_n **asosli baho** deyiladi.

Agar θ parametrning θ_{n1} va θ_{n2} siljimagan baholari uchun biror n hajmli tanlanmada $D(\theta_{n1}) < D(\theta_{n2})$ o'rinli bo'lsa, u holda θ_{n1} baho θ_{n2} bahoga nisbatan n hajmli tanlanma uchun **samaraliroq (optimalroq) baho** deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan baho, bu hajmda eng **samarali baho** deyiladi.

Demak, baho dispersiyasining kichiklashib borishi uning yaxshilanib borishiga kafolat ekan. Shuning uchun bahoga qo'yiladigan yana bir talab uchun asos bo'lib xizmat qiladigan mashhur Rao-Kramer tensizligini keltiramiz.

Rao-Kramer teoremasi. Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdorning va θ_n statistikaning taqsimot qonunlari ma'lum bir regulyarlik (taqsimot funktsiya aniqlanish sohasi noma'lum θ parametrga bog'loq emas) shartlarini qanoatlantirsin va θ_n baho siljimagan baho bo'lsin, u holda

⁸⁴ Кремер Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр

$$D(\theta_n) \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \quad (*)$$

tanlanmaning har bir elementiga θ parameter haqida mavjud bo'lgan Fisher axboroti deyiladi.

Bu yerda

$$I(\theta) = M \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_{\theta}(X) \right)^2 \right].$$

Agar siljimagan $\tilde{\theta}_n$ baho dispersiyasi Rao-Kramer tengsizligining quyi chegarasiga erishsa, ya'ni (*) munosabatda tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bunday baho **effektiv baho** deyiladi.

$\bar{X}_n$ - tanlanma o'rtacha bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan, asosli va eng samarali baho bo'ladi.

σ_n^2 - tanlanma dispersiya bosh to'plam dispersiyasi uchun asosli baho bo'ladi, lekin siljimagan baho bo'la olmaydi (ya'ni $M(\sigma_n^2) = \frac{n-1}{n} D(X)$). Shuning uchun siljimaganlikka tuzatilgan baho, ya'ni

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

tuzatilgan tanlanma **dispersiya** deyiladi. Bundan tashqari tanlanma dispersiyadan olingan kvadrat ildiz σ_n - tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish, tuzatilgan tanlanma dispersiyadan olingan kvadrat ildiz esa s_n - tuzatilgan tanlanma **o'rtacha kvadratik chetlanish** deyiladi.

Yuqoridagi keltirilgan asosiy tanlanma xarakteristikalaridan tashqari yana bir qancha amaliyotda ko'p uchraydigan tanlanma xarakteristikalarini ko'rib o'tamiz.

Eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta (agar u mavjud bo'lsa), **tanlanma moda** (M_o) deyiladi. Variatsion qatorni teng ikki qismga ajratuvchi tartiblangan statistika mediana (M_e) deyiladi, ya'ni

$$M_e = \begin{cases} x_{(k)}, & \text{agar } n = 2k - 1; \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, & \text{agar } n = 2k. \end{cases}$$

Bundan tashqari p - tartibli tanlanma kvantill (X_{p_n}) quyidagi statistika yordamida aniqlanadi:

$$X_{p_n} = X_{(k)},$$

bu yerda $k = \begin{cases} [np] + 1, & \text{agar } np \text{ butun bo'lmasa;} \\ np, & \text{agar } np \text{ butun bo'lsa.} \end{cases}$

1. Sterjenning uzunligi 5 marta o'lchanganda quyidagi natijalar olingan:

92, 94, 103, 105, 106.

a) sterjen uzunligining tanlanma o'rta qiymatini;

b) yo'l qo'yilgan xatolarning tanlanma dispersiyasini toping.

Yechish. a) tanlanma o'rtacha $\bar{x}_T$ ni topish uchun shartli variantalardan foydalanamiz:

$$u_i = x_i - 92$$

$$\bar{x}_T = 92 + \frac{0 + 2 + 11 + 13 + 14}{5} = 92 + 8 = 100.$$

b) tanlanma dispersiyani topamiz:

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_T)^2}{n} = \\ &= \frac{(92 - 100)^2 + (94 - 100)^2 + (103 - 100)^2 + (105 - 100)^2 + (106 - 100)^2}{5} = 34. \end{aligned}$$

2. Bosh to'plamdan $n=60$ hajmli tanlanma olingan.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Bosh o'rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

Yechish. Bosh o'rtacha qiymatning siljimagan bahosi tanlanma o'rtacha bo'ladi.

$$\bar{x}_T = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 40 + 6 \cdot 10 + 26 \cdot 2}{60} = \frac{240}{60} = 4$$

4. Ushbu $n=10$ hajmli tanlanma taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtachani va tanlanma dispersiyani toping.

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Yechish. $u_i = 100x_i$, ($h = \frac{1}{100}$) shartli variantalarga o'tamiz hamda quyidagi taqsimotni hosil qilamiz.

u_i	1	4	8
-------	---	---	---

n_i	5	3	2
-------	---	---	---

$$\bar{u}_\tau = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{1}{10} (1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2) = 3,3;$$

$$\bar{x}_\tau = \frac{u}{100} = 0,033;$$

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n} \right]^2 = \frac{5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2}{10} - \left[\frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{10} \right]^2 = 7,21;$$

$$D_\tau^x = h^2 D_\tau^u = \frac{1}{100^2} \cdot 7,21 \approx 0,0007.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

330. Ushbu $n=10$ hajmli tanlanma taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

331. $n=10$ hajmli tanlanmaning ushbu taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtachani toping.

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

332. Bosh to'plamdan $n=50$ hajmdagi tanlanma ajratilgan

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Bosh to'plam o'rta qiymatining siljimagani bahosini toping.

333. Guruhdagi 40 ta talabalarining yozma ish baholarining chastotalari jadvali berilgan.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Tanlanma o'rtacha va tanlanma dispersiyasini toping.

334. $n=100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	2502	2804	2908	3028
n_i	8	30	60	2

335. $n=50$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha bosh to'plam dispersiyasining siljigan bahosini toping.

x_i	0.1	0.5	0.6	0.8
n_i	5	15	20	10

336. $n=50$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyani toping.

x_i	18.4	18.9	19.3	19.6
n_i	10	12	18	10

337. $n=41$ hajmli tanlanma bo'yicha bosh to'plam dispersiyasining $D_T=3$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

338. $n=10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tuzatilgan tanlanma dispersiyani toping.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

339. $n=100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtacha, dispersiya va tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishni toping.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

340. Ushbu $n=10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiya va tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishni toping.

x_i	23.5	26.1	28.2	30.4
n_i	2	3	4	1

341. Ushbu $n=100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

342-344- masalalarda tanlanma o'rtacha, tanlanma dispersiya, tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish, tanlanma moda va tanlanma medianani toping.

342. Quyidagi detallar partiyasining o'lchovini standart o'lchovdan farqi (mm) keltirilgan:

17;	21;	8;	20;	23;	18;	22;	20;	17;	12;
20;	11;	9;	19;	20;	9;	19;	17;	21;	13;
17;	22;	22;	10;	20;	20;	15;	19;	22;	20;
13;	21;	21;	9;	14;	11;	19;	18;	23;	19.

343. Diodlar partiyasining (nanosekunda) tiklanish vaqti berilgan:

69;	73;	70;	68;	61;	73;	70;	72;	67;	70;
66;	70;	76;	68;	71;	71;	68;	70;	64;	65;
72;	70;	70;	69;	66;	70;	77;	69;	71;	74;
72;	72;	72;	68;	70;	67;	71;	67;	72;	69;
66;	75;	76;	69;	71;	67;	70;	73;	71;	74.

344. Partiyadagi bir xil kimyoviy moddaning reaksiyasi davomiyligi (sekunda) berilgan:

8.5;	7.1;	6.7;	6.2;	2.9;	4.4;	6.0;	5.8;	5.4;	8.2;
6.9;	6.5;	6.1;	3.8;	6.0;	6.0;	5.6;	5.3;	7.7;	6.8;
6.5;	6.1;	4.2;	4.7;	5.6;	5.4;	5.3;	7.4;	6.7;	6.4;
6.1;	4.5;	6.0;	5.8;	5.6;	5.1.				

345. X tasodifiy miqdor

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ e^{a-x}, & \text{agar } x \geq a, \end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanma yordamida noma'lum a parametrning bahosi sifatida taklif qilingan $a_n = X_{(n)}$ statistika siljimagani va asosli ekanligini isbotlang.

Tovar sotishdan kelgan tushum, (mln. so'm)	1,0 gacha	1,0-1,2	1,2-1,4	1,4-1,6	1,6-1,8	1,8-2,0	2,0 va undan yuqori
Savdo do'konlari soni	12	23	30	38	15	11	10

346*. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanma $R(0,1)$ tekis taqsimlangan bosh to'plamdan olingan.

$m_{(n)} = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ statistika bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan va asosli baho ekanligini isbotlang.

347*. θ_n noma'lum θ parametrning siljimagan bahosi va $D(\theta) < \infty$ bo'lsa, θ_n^2 statistika θ^2 parametr uchun siljigan baho ekanligini isbotlang va siljishni hisoblang.

348*. Noma'lum λ parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'yicha hisoblangan tanlanma o'rtacha λ parametr uchun siljimagan va asosli baho ekanligini ko'rsating.

349*. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanma $R(0,1)$ tekis taqsimlangan bosh to'plamdan olingan.

$m_{(n)} = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ statistika ixtiyoriy hajmdagi tanlanma uchun bosh to'plam matematik kutilmasining tanlanma o'rtachaga qaraganda samaraliroq baho ekanligini isbotlang.

350. Quyidagi jadvalda ishlab chiqarish korxonasining bitta sexi bo'yicha ishchilarning o'rtacha oylik maoshi haqidagi ma'lumotlar berilgan.

Ishchilarning oylik maoshi, (sh.p.b)	200-225	225-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500	500-550	550-600
Ishchilar soni	12	23	30	38	15	11	10	9	8

Yuqoridagi ma'lumotlar bo'yicha ishchilar oylik maoshi uchun tanlanma o'rtacha, tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishni toping. Chastotalar gistogrammasini yasang.

351. Tanlab olingan xususiy tadbirkorlik asosida faoliyat olib boruvchi savdo do'konlarining bir kunlik tushumi haqidagi ma'lumot quyidagi jadvalda keltirilgan.

Tovar sotishdan tushadigan o'rtacha tushumni, tanlanma dispersiyani, o'rtacha kvadratik chetlanishni toping.

352. Aksionerlik jamiyati tomonidan sotilgan aksiyalar haqida quyidagi ma'lumot olingan.

Aksiyani sotish, ustav kapitalidan olinadigan, %	9-15	15-21	21-27	27-33
Ochiq turdagi aksionerlik jamiyatlari soni	3	5	4	2

Aksiyani sotishning o'rtacha foizini aniqlang. Mos ko'rsatkichlar bo'yicha aksiyalarni sotish foizining gistogrammasini yasang.

353. Yilning 7 oyi uchun bankning korxonalarga bergan krediti quydagi jadvalda keltirilgan.

Oylar	aprel	may	iyun	iyul	avgust	sentyabr	oktyabr
Kredit miqdori, (sh.p.b. da)	981,1	1025,3	1041,8	1393,0	1860,0	2153,2	2731,0

Ko'rsatilgan davr uchun bir oylik o'rtacha kredit miqdorini toping. Mos ko'rsatkichlar bo'yicha kredit miqdori gistogrammasini yasang.

354. Biror korxonada bir oy ichida ishchilarning kasalligi tufayli kelmay qolgan kunlari soni aniqlangan bo'lsin.

Joriy oyda qoldirilgan kunlar soni	0	1	2	3	4	5
Ishchilar soni	10	17	25	28	30	27

Chastotalar poligonini yasang. O'rtacha qoldirilgan kunlar sonini, o'rtacha kvadratik chetlanishini aniqlang.

355. A va B aksiyalar haqida quyidagi ma'lumotlar berilgan.

Kelgusi yil uchun iqtisodiy ahvol	Qanday holatlar yuz berish ehtimoli	Kelgusi yilda B aksiyaning qaytish, %	Kelgusi yilda A aksiyaning qaytish, %
Ishchanlik faoliyatining pasayishi	0,3	9,8	10
O'rtacha o'sish	0,4	11,2	11
Ishchanlik faoliyatining o'sishi	0,3	13	12

A va B aksiyalarning o'rtacha bahosi, tanlanma dispersiyasini hisoblang. Siz qaysi tur aksiyani sotib olish maqsadga muvofiq deb hisoblaysiz?

356. Quyidagi ma'lumotlar bo'yicha kompaniyalarning yillik daromadlarini tahlil qiling. Har bir kompaniya uchun o'rtacha daromad miqdorini va o'rtacha kvadratik

chetlanishini toping. Qaysi bir kompaniyaning 10 yillik ish faoliyati samaraliroq ekanini aniqlang.

Yil	Cherry Computers	Lemon Motors	Orange Electronics
1983	14,2	-6,2	37,5
1984	12,3	13,3	-10,6
1985	-16,2	-8,4	40,3
1986	15,4	27,3	5,4
1987	17,2	28,2	6,2
1988	10,3	14,5	10,2
1989	-6,3	-2,4	13,8
1990	-7,8	-3,1	11,5
1991	3,4	15,6	-6,2
1992	12,2	18,2	27,5

357. Quyidagi jadval turli iqtisodiy holatlarda “Charleston Corporation” kompaniyasi aksiyalarining bahosi bo‘lib, bu ma’lumotlar asosida aksiyaning o‘rtacha bahosini aniqlang, tanlanma dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Kompaniyaning kelgusi yil uchun iqtisodiy ahvol	Qanday holatlar yuz berish ehtimoli	Aksiyaning bahosi, (AQSh dollarida)
Krizis	0,25	65
Ishchanlik faoliyatining pasayishi	0,25	80
O‘rtacha o‘sish	0,3	95
Ishchanlik faoliyatining o‘sishi	0,2	100

358. "O‘zbekiston havo yo‘llari" aviakompaniyasining Toshkent-Istanbul reysi bo‘yicha joriy yilning avgust-sentyabr (30 kun) oylarida uchgan passajirlarning soni haqida quyidagi ma’lumotlar keltirilgan: 228, 221, 234, 218, 223, 209, 220, 216, 225, 228, 221, 229, 230, 231, 227, 219, 214, 224, 210, 226, 234, 225, 228, 223, 228, 233, 232, 236, 234, 229.

Variatsion qator tuzing. Reysdagi passajirlarning o‘rtacha sonini aniqlang. Tanlanma dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

13-mavzu. Ishonchlilik ehtimoli va ishonchlilik oralig'i. Normal taqsimot parametrlarining ishonchlik oraliqlari

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanma berilgan bo'lib, uning taqsimot funksiyasi $F_\theta(x)$ hamda $\theta_n = \theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistika θ parametr uchun statistik baho bo'lsin. Bunday baho **nuqtaviy baho**⁸⁵ deyiladi. Tanlanma hajm unchalik katta bo'lmaganda nuqtaviy baho parametrning haqiqiy qiymatidan sezilarli farq qiladi hamda nuqtaviy baholardan boshqa baholarni o'rganishga zaruriyat paydo bo'ladi.

Agar ixtiyoriy $\gamma \in (0;1)$ son uchun $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma$ munosabatni qanoatlantiruvchi, shunday $\theta_1 < \theta_2$ son topish mumkin bo'lsa, u holda $(\theta_1; \theta_2)$ oralig' γ ishonchlilik ehtimoliga mos keluvchi **ishonchlilik oralig'i** deyiladi. Ko'pincha $\theta_1; \theta_2$ sonlar $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanmaga bog'liq qilib olinadi. Bu esa $(\theta_1; \theta_2)$ ni intervalli baho sifatida qabul qilishga olib keladi.

Dastlab normal taqsimot parametrlarining ishonchlilik oraliqlarini baholarini keltiramiz.

Normal taqsimot a va σ^2 parametrlarga bog'liq.

Normal taqsimlangan bosh to'plamning matematik kutilmasi a uchun quyidagi ishonchli oralikdan foydalaniladi.

a) agar σ - o'rtacha kvadratik chetlanish ma'lum bo'lsa, γ – ishonchlilik ehtimoli bilan matematik kutilma uchun

$$\bar{x}_T - t_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (1)$$

ishonchlilik oralig'ini topamiz. Bu yerda $t_{\frac{\gamma}{2}}$ - Laplas funksiyasi $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}})$ uchun,

$$\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2} \text{ tenglamaning ildizi.}$$

b) Agar σ – o'rtacha kvadratik chetlanish noma'lum bo'lsa, tanlanma hajmi $n < 30$ bo'lganda

$$\bar{x}_T - t_{n-1; \frac{1+\gamma}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t_{n-1; \frac{1+\gamma}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \quad (2)$$

bu yerda, s_n - tuzatilgan tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish va $t_p(k)$ - ozodlik darajasi k bo'lgan Student taqsimotining p - tartibli kvantilli.

Normal taqsimlangan bosh to'plamning dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchlilik oralig'idan foydalaniladi:

a) agar a matematik kutilmasi ma'lum bo'lsa,

⁸⁵ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр

$$\frac{ns_0^2}{\chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(n)} < \sigma^2 < \frac{ns_0^2}{\chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(n)}, \quad (3)$$

bu yerda $s_0^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - a)^2$ va $\chi_p^2(k)$ - ozodlik darajasi k ga teng bo'lgan "xi-kvadrat" taqsimotining p -tatibli kvantilli.

b) agar a matematik kutilmasi noma'lum bo'lsa,

$$\frac{ns_n^2}{\chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{ns_n^2}{\chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(n-1)}, \quad (4)$$

$$\text{bu yerda } s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Bernulli sxemasida γ ishonchlilik ehtimoli bilan muvoffaqiyatlar ehtimoli p ning ishonchlilik oralig'ini topish uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$h - t_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} < p < h + t_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}, \quad (5)$$

bu yerda h - A hodisa yuz berishlar sonining nisbiy chastotasi, $t_{\frac{\gamma}{2}}$ - Laplas funksiyasi

$\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}})$ uchun, $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$ tenglamaning ildizi.

Xuddi shunga o'xshash agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanma no'malum λ parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega bo'lgan bosh to'plamdan olingan bo'lsa, u holda λ uchun γ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchlilik oralig'i

$$\bar{x}_n - t_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} < \lambda < \bar{x}_n + t_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}}, \quad (6)$$

bu yerda $t_{\frac{\alpha}{2}}$ huddi yuqoridagidek ma'noga ega.

1. Bosh to'plam $N(a, \sigma)$ normal taqsimlangan bo'lsin. Noma'lum matematik kutilma (a) ni $\gamma=0,95$ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma=5$, tanlanma o'rtacha $\bar{X}_n=14$ va tanlanma hajmi $n=25$ berilgan.

Yechish. $\Phi(t) = \frac{1}{2}\gamma$ munosabatdan $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$ bo'lib, jadvaldan $t=1,96$ ni topamiz. Topilganlarni

$$\bar{X}_n - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_n + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{formulaga qo'yib,}$$

$$\left(14 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}; 14 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \right)$$

yoki

$$(12,04; 15,96)$$

ishonchli oralig'ini aniqlaymiz.

2. Bosh to'plamning $N(a, \sigma)$ normal taqsimlangan. $n = 16$ hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rtacha $\bar{X}_n = 20,2$ va tanlanmaning tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanish $s_n=0,8$ topilgan. Noma'lum matematik kutilmaning ishonchli oralig'ini $\gamma=0,95$ ishonchlilik ehtimoli bilan baholang.

Yechish. $t(n-1)_{\frac{1+\gamma}{2}}$ ni jadvaldan topamiz. $\gamma=0,95$; $n=16$; $t(n-1)_{0,975}=2,13$. Bu qiymatlarni

$$\bar{X}_n - t(n-1)_{0,975} \frac{s_n}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_n + t(n-1)_{0,975} \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo'ysak,

$$\left(20,2 - 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}}; 20,2 + 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}} \right)$$

yoki

$$(19,774; 20,626)$$

hosil bo'ladi.

Demak, noma'lum a parametr 0,95 ishonchlilik ehtimoli bilan (19.774;20.626) ishonchli oralig'ida yotadi.

3. Bosh to'plamning normal taqsimlangan $n = 16$ hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish $s_n=1$ topilgan. Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishi σ ni 0,95 ishonchlilik ehtimoli bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping.

Yechish. Masalada matematik kutilmasi noma'lum bo'lib, $\gamma=0,95$ va $n=16$ bo'yicha jadvaldan

$$\chi^2_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1) = 27,5; \quad \chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}}(n-1) = 6,26$$

ekanligini topamiz. Topilgan qiymatlarni (4) formulaga qo'yamiz va $0.5818 < \sigma^2 < 2.5959$ yoki $0.7628 < \sigma < 1.5987$ ishonchli oralig'ini hosil qilamiz.

Mustaqil yechish uchun masalalar

359. Tasodifiy miqdor $\sigma=2$ parametr bilan normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lib, $n=25$ hajmli tanlanma olingan. $\bar{X}_n=24,12$. Bu taqsimotning noma'lum a parametri uchun $\gamma=0,95$ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oralig'ini toping.

360. Fizik kattalikni to'qqizta bir xil, bog'liq bo'lmagan o'lchash natijasida olingan ma'lumotning o'rta arifmetigi $\bar{X}_n=42,319$ va tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma_n=5$ topilgan. O'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini $\gamma=0,95$ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oralig'ini toping.

361. Agar 10 ta bog'liq bo'lmagan o'lchashlar natijasida ob'ektgacha bo'lgan masofa (m) uchun 25025, 24970, 24780, 25315, 24097, 24646, 24717, 25354, 24912, 25374 natijalar olingan bo'lsa, manzilgacha bo'lgan masofaning matematik kutilmasi uchun $\gamma=0,9$ ishonchlilik bilan ishonchli oralig'ini toping. Bunda o'lchash xatoligi $\sigma=100$ o'rtacha kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan, deb faraz qilinadi.

362. 10 ta erkli o'lchashlar natijasida sterjen uzunligi (mm) uchun quyidagi ma'lumotlar olingan: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25. O'lchash xatoligi normal taqsimlangan deb faraz qilib, sterjen uzunligining matematik kutilmasi uchun $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli oralig'ini toping.

363. Bosh to'planning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo'yicha tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanishi s_n topilgan. Agar $n=10$ va $s_n=5,1$ bo'lsa, $\gamma=0,99$ ishonchlilik ehtimoli bilan:

a) dispersiyasini qoplaydigan;

b) o'rtacha kvadratik chetlanishni qoplaydigan ishonchli oralig'ini toping.

364. Biror fizik kattalikni bog'liq bo'lmagan bir xil aniqlikdagi 9 ta o'lchash ma'lumotlari bo'yicha, o'lchashlarning o'rta arifmetik qiymati $\bar{X}_n=30,1$ va o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma_n=6$ topilgan. O'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli oralig'ini yordamida $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan baholang.

365. Bosh to'planning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. Bosh to'planning noma'lum matematik kutilmasi (a) ni $0,95$ ishonchlilik ehtimoli bilan qoplaydigan ishonchlik oralig'ini toping, bunda o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma=4$, tanlanma o'rtacha $\bar{X}_n=10,2$ va tanlanma hajmi $n=16$.

366. Bosh to'planning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. Tanlanma o'rtacha $0,925$ ishonchlilik ehtimoli bilan noma'lum matematik kutilmasini qiymatini 0.2 aniqlikda baholash uchun kamida nechta tajriba o'tkazilishi kerak. O'rtacha kvadratik chetlanishini $\sigma=1,5$ ga teng deb oling.

367. Tanlanmaning $0,975$ ishonchlilik ehtimoli bilan shunday minimal hajmini topingki, bunda normal taqsimlangan bosh to'plam noma'lum matematik kutilmasi (a) ni tanlanma o'rtacha teng, deb olinganidagi xatolik $\delta=0,3$ dan oshmasin. Bosh to'planning o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=1,2$ ga teng.

368. Bosh to'plamdan $n=10$ hajmli tanlanma olingan

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Bosh to'plam normal taqsimlangan bo'lsa, σ matematik kutilmasini tanlanma o'rtacha qiymat bo'yicha 0,95 ishonchlilik bilan o'z ichiga olishi mumkin bo'lgan oraliqni toping.

369. Bosh to'plamdan $n=12$ hajmli tanlanma olingan:

x_i	-0.5	-0.4	-0.2	0	0.2	0.6	0.8	1	1.2	1.5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Bosh to'plam matematik kutilmasi σ uchun 0,95 ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oraliq'ini toping.

370. Oddiy ko'z bilan qaraganda bir xildek, lekin o'lchovlari bilan farq qiladigan yaroqli va yaroqsiz detallar omborda aralash holda yotibdi. Shu detallar ichidan tavakkaliga 100 ta detal ajratib olindi va ularning yaroqliligi o'lchov asbobi yordamida aniqlandi. Aniqlanganlarning 36 tasi yaroqli detal ekan. Ombordan tavakkaliga tanlangan detalning yaroqli bo'lishi ehtimoli uchun 95% li ishonchlilik oraliq'i topilsin.

371. Avtomatik ravishda ishlab chiqarilayotgan podshipniklarning 400 tasi tekshirish uchun ajratib olingan. Natijada ularning 10 tasi yaroqsiz ekanligi aniqlandi. a) ishlab chiqarilayotgan podshipniklarning yaroqsiz bo'lish ehtimoli uchun 90% li ishonchlilik oraliq'ini toping; b) 0,9973 ishonchlilik ehtimoli bilan ishlab chiqarilayotgan podshipniklarning yaroqsiz bo'lishi ehtimoli uning yuqoridagi yaroqsiz bo'lishlik chastotasidan farqi 5% dan oshmasligi uchun kamida nechta podshipnikni tekshirish kerakligini aniqlang.

372. Shaharda jami 36 ta ATS ishlaydi. Tungi soat ikkidano uchgacha bo'lgan vaqt oraliq'ida ATS larning har birida bo'lgan chaqiriqlarning o'rtacha soni 2 ga tengligi qayd qilindi. Har bir ATS dagi chaqiriqlar soni Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi deb faraz qilib, λ parametr uchun 0,9 ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchlilik oraliq'ini toping.

373. Institutdagi 100 ta kompyuter Internet tarmog'iga ulangan. Kun davomida (soat 9⁰⁰ dan 18⁰⁰ gacha) har bir kompyuter Internet tarmog'ida ishlab turgan vaqtida vaqti-vaqti bilan o'rtacha 2,3 marotaba noma'lum sabablarga ko'ra, tarmoqda uzilish ro'y beradi. Internet tarmog'iga ulangan kompyuterlarning ishlab turgan vaqtida tarmoqda ro'y bergan uzilishlari soni Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi deb faraz qilib λ parametr uchun 95% li ishonchlilik oraliq'ini toping.

374. Kurort shaharlardan birini reklama qilayotgan sayyohlik firmasi shaharning ob-havosi haqida ma'lumot berib, o'rtacha yillik temperaturaning 20⁰ C ga tengligini ta'kidlab o'tdi. Agar havo temperaturasi normal taqsimlangan bo'lib, kunlik temperaturaning standartdan chetlanishi 4⁰ C ni tashkil qilsa, tasodifiy ravishda tanlab olingan yilning 35 kunii uchun o'rtacha temperaturaning o'rtacha yillik temperaturadan absolyut qiymati bo'yicha farqi 2⁰ C dan oshmaslik ehtimoli nimaga teng?

14-mavzu. Shartli o'rtacha qiymatlar. Korrelyatsion jadval. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar ustida kuzatishlar otkazilgan bo'lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda $(X_1; Y_1), (X_2; Y_2), \dots, (X_k; Y_k)$ lardan iborat bo'lsa, u holda X va Y orasidagi bog'lanishni ushbu jadval ko'rinishida tasvirlash mumkin.

X_i	X_1	X_2	$\dots$	X_k
Y_i	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_k

Agar kuzatishlar natijasida hosil bo'lgan $(X_i; Y_i)$ juftlarining soni juda ko'p bo'lsa, hamda ularning ayrimlari tez-tez takrorlanadigan bo'lsa, u holda yuqoridagi jadval o'rniga quyidagi ikki o'lchovli jadvalni keltirish mumkin.

$X \backslash Y$	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_s	M_x
X_1	m_{11}	m_{12}	$\dots$	m_{1s}	M_{x1}
X_2	m_{21}	m_{22}	$\dots$	m_{2s}	M_{x2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	m_{k1}	m_{k2}	$\dots$	m_{ks}	M_{xk}
M_{1s}	M_{y1}	M_{y2}	$\dots$	M_{ys}	N

Bu jadval korrelyatsion jadval yoki korrelyatsion **panjara** deb ataladi.

Aytaylik, X va Y miqdorlar orasidagi bog'lanish o'rganilayotgan bo'lsin. X ning har bir qiymatiga Y ning bir necha qiymati mos kelsin.

Masalan, $X_1=8$ da $Y_1=2$ sonni 5 marotaba, $Y_2=3$ sonni 3 marotaba, $Y_3=7$ sonni 2 marotaba qabul qilgani ma'lum bo'lsin. Bularning arifmetik o'rtachasini topsak:

$$\bar{y}_8 = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{10} = 3,3;$$

u holda $\bar{y}_8$ – shartli o'rtacha qiymat deb ataladi.

$\bar{y}_x$ – shartli o'rtacha qiymat deb, Y ning $X=x$ qiymatga mos qiymatlarining arifmetik o'rtachasiga aytiladi.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti alohida muhim ahamiyatga ega bo'lib, u miqdorlar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanishning zichligini baholash uchun xizmat qiladi. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y} = \frac{(\overline{x \cdot y}) - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \text{yoki} \quad r_T = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y}$$

formula bo'yicha hisoblanadi⁸⁶.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti uchun $|r_T| \leq 1$ munosabat har doim o'rinli bo'lib, r_T kattalik birga qancha yaqin bo'lsa, bog'lanish shuncha kuchli bo'ladi. 0 ga qancha yaqin bo'lsa, bog'lanishi shuncha kuchsiz bo'ladi.

1. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o'rta qiymat $\bar{X}_y$ ni toping.

$X \backslash Y$	4	5	6	7	n_y
1	3	1	-	3	7
2	-	2	4	1	7
3	5	1	5	-	11
n_x	8	4	9	1	$n=25$

Yechish.

$$x_1 = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 3}{7} = \frac{38}{7}$$

$$x_2 = \frac{4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 1}{7} = \frac{41}{7}$$

$$x_3 = \frac{4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 0}{11} = \frac{55}{11}$$

2. Berilgan korrelyatsion jadval bo'yicha $\bar{Y}_x$, $\bar{X}_y$, σ_{xy}^2 va σ_{yx}^2 ni, shuningdek, σ_x , σ_y va r_{xy} ni hisoblang hamda quyidagi jadvalni to'ldiring.

⁸⁶ Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр

Yechish.

$$\bar{Y}_{X=10} = \frac{40 \cdot 2 + 50 \cdot 11 + 60 \cdot 3 + 70 \cdot 2}{18} \approx 52.7778;$$

$$\bar{Y}_{X=11} = \frac{40 \cdot 1 + 50 \cdot 19 + 60 \cdot 2 + 70 \cdot 4}{26} \approx 53.4615;$$

$$\bar{Y}_{X=12} = \frac{40 \cdot 3 + 50 \cdot 6 + 60 \cdot 27 + 70 \cdot 6}{42} \approx 58.5714;$$

$$\bar{Y}_{X=13} = \frac{40 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 70 \cdot 6}{10 \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 13 \cdot 2} \approx 46.1111.$$

$$\bar{X}_{Y=40} = \frac{10 \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 13 \cdot 2}{8} = 11.625;$$

$$\bar{X}_{Y=50} = \frac{10 \cdot 11 + 11 \cdot 19 + 12 \cdot 6 + 13 \cdot 3}{39} \approx 11.0256;$$

$$\bar{X}_{Y=60} = \frac{10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 27 + 13 \cdot 3}{35} \approx 11.8571;$$

$$\bar{X}_{Y=70} = \frac{10 \cdot 2 + 11 \cdot 4 + 12 \cdot 6 + 13 \cdot 6}{10^2 \cdot 2 + 11^2 \cdot 1 + 12^2 \cdot 3 + 13^2 \cdot 2} \approx 11.8889.$$

$$\overline{X^2}_{Y=40} = \frac{10^2 \cdot 2 + 11^2 \cdot 1 + 12^2 \cdot 3 + 13^2 \cdot 2}{8} = 136.375;$$

$$\overline{X^2}_{Y=50} = \frac{10^2 \cdot 11 + 11^2 \cdot 19 + 12^2 \cdot 6 + 13^2 \cdot 3}{39} = 122.30769;$$

$$\overline{X^2}_{Y=60} = \frac{10^2 \cdot 3 + 11^2 \cdot 2 + 12^2 \cdot 27 + 13^2 \cdot 3}{35} \approx 141.05714;$$

$$\overline{X^2}_{Y=70} = \frac{10^2 \cdot 2 + 11^2 \cdot 4 + 12^2 \cdot 6 + 13^2 \cdot 6}{40^2 \cdot 2 + 50^2 \cdot 11 + 60^2 \cdot 3 + 70^2 \cdot 2} \approx 142.333.$$

$$\overline{Y^2}_{X=10} = \frac{40^2 \cdot 2 + 50^2 \cdot 11 + 60^2 \cdot 3 + 70^2 \cdot 2}{18} \approx 2850;$$

$$\overline{Y^2}_{X=11} = \frac{40^2 \cdot 1 + 50^2 \cdot 19 + 60^2 \cdot 2 + 70^2 \cdot 4}{26} \approx 2919.231;$$

$$\overline{Y^2}_{X=12} = \frac{40^2 \cdot 3 + 50^2 \cdot 6 + 60^2 \cdot 27 + 70^2 \cdot 6}{42} \approx 3485.714;$$

$\begin{matrix} \text{Y} \\ \text{X} \end{matrix}$	40	50	60	70	n_y	$\bar{Y}_x$	$\sigma^2_{y_x}$
10	2	11	3	2	18		
11	1	19	2	4	26		
12	3	6	27	6	42		
13	2	3	3	6	14		
n_x	8	39	35	18	n=100		
$\bar{X}_y$							
$\sigma^2_{x_y}$							

$$\bar{X} = \frac{10 \cdot 18 + 11 \cdot 26 + 12 \cdot 42 + 13 \cdot 14}{100} = 11.52;$$

$$\bar{Y} = \frac{40 \cdot 8 + 50 \cdot 39 + 60 \cdot 35 + 70 \cdot 18}{100} = 56.3;$$

$$\overline{X^2} = \frac{10^2 \cdot 18 + 11^2 \cdot 26 + 12^2 \cdot 42 + 13^2 \cdot 14}{100} = 133.6;$$

$$\overline{Y^2} = \frac{40^2 \cdot 8 + 50^2 \cdot 39 + 60^2 \cdot 35 + 70^2 \cdot 18}{100} = 3245;$$

$$\sigma_x^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = 0.8896; \quad \sigma_x = 0.9432;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2 = 75.31; \quad \sigma_y = 8.6781;$$

$$\overline{X \cdot Y} = \frac{10 \cdot 40 \cdot 2 + 10 \cdot 50 \cdot 11 + \dots + 13 \cdot 70 \cdot 6}{100} = 651;$$

$$r_{xy} = \frac{\overline{X \cdot Y} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = 0.2961.$$

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	40	50	60	70	n_y	$\bar{Y}_x$	$\sigma_{y_x}^2$
10	2	11	3	2	18	52.7778	64.5039
11	1	19	2	4	26	53.4615	61.0988
12	3	6	27	6	42	58.5714	55.1054
13	2	3	3	6	14	59.2857	120.9184
n_x	8	39	35	18	n=100	$\bar{Y}=56.3$	$\sigma_y^2=75.31$
$\bar{X}_y$	11.625	11.025	11.857	11.889	$\bar{X}=11.52$	$\bar{X} \cdot \bar{Y}=651$	$\sigma_y=8.6781$
$\sigma_{x_y}^2$	1.23438	0.7438	0.4663	0.9876	$\sigma_x^2=0.8896$	$\sigma_x=0.9432$	$r_{xy}=0.2961$

3. Bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi 5 ta sanoat korxonalari bo'yicha quyidagi mahsulotlar olingan.

Mehnatni elektr energiya bilan ta'minlanganligi- X (kvt/soat)	7,1	8,3	8,5	9	10,5
Mehnat unumdorligi – Y (dona)	14	16	14	15	17

Bu ma'lumotlardan foydalanib tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

Yechish.

$$r_T = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y}, \quad (*)$$

formuladagi zarur hisoblashlarni bajaramiz:

$$\bar{x} = \frac{7,1 + 8,3 + 8,5 + 9 + 10,5}{5} = 8,68;$$

$$\bar{y} = \frac{14 + 16 + 14 + 15 + 17}{5} = \frac{76}{5} = 15,2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{7,1^2 + 8,3^2 + 8,5^2 + 9^2 + 10,5^2}{5} - 8,68^2} \approx 1,1;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{14^2 + 16^2 + 14^2 + 15^2 + 17^2}{5} - 15,2^2} \approx 1,16;$$

$$\sum x_i y_i = 7,1 \cdot 14 + 8,3 \cdot 16 + 8,5 \cdot 14 + 9 \cdot 15 + 10,5 \cdot 17 = 664,7.$$

Aniqlangan qiymatlarni (*) formulaga qo'ysak,

$$r_r = \frac{664,7 - 5 \cdot 8,68 \cdot 15,2}{5 \cdot 1,1 \cdot 1,6} = \frac{5,02}{6,38} \approx 0,79$$

bo'ladi.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining topilgan bu qiymati X va Y belgilar orasidagi chiziqli bog'liqlik kuchli ekanligini ko'rsatadi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

375. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o'rta qiymat $\bar{X}_y$ ni toping.

$Y \backslash X$	3	4	5	6	n_y
2	5	-	1	4	10
3	1	2	-	-	3
4	-	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	$n=25$

376. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o'rta qiymati $\bar{y}_x$ ni toping.

$X \backslash Y$	3	3.5	4	4.5	5
7	5	3	-	-	-
9	2	3	5	3	1
13	-	1	1	2	2

377. Berilgan jadval bo'yicha tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

X	-1	3	4	0	2	3	1	4
Y	2	0	1	-1	1	1	2	0

378. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

379. Agar

X	3	5	1	-2	4	2	1	0	3
Y	-2	0	1	5	1	2	3	1	1

bo'lsa, tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

380. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

381. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o'rta qiymat $\bar{x}_y$ ni toping.

$X \backslash Y$	1	9	19	n_y
0	13	-	-	13
2	2	10	-	12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	$n=50$

382. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o'rta qiymat $\bar{y}_x$ ni toping.

383. Berilgan korrelyatsion jadval bo'yicha $\bar{Y}_x$, $\bar{X}_y$, σ_{xy}^2 va σ_{yx}^2 ni, shuningdek, σ_x , σ_y va r_{xy} ni hisoblang.

$X \backslash Y$	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
3	1	14	-	15
4	-	2	18	20
n_x	16	16	18	$n=50$

384. Tumandagi 10 ta oziq-ovqat do'koni bo'yicha bir oylik tovar-ayirboshlash hajmi (X) va shu davr mobaynidagi muomala harakatlari (Y) hajmi o'rganilgan. Bu ma'lumotlar asosida tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	5	15	25	35	45	55	n_y	$\bar{Y}_x$	$\sigma^2_{y_x}$
10	5	7	-	-	-	-	12		
20	-	20	23	-	-	-	43		
30	-	-	30	47	2	-	79		
40	-	-	10	11	20	6	47		
50	-	-	-	9	7	3	19		
n_x	5	27	63	67	29	9	n=200		
$\bar{X}_y$									
$\sigma^2_{x_y}$									

X (mln so'm)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y (mln so'm)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

385. Quyidagi berilgan ma'lumotlar bo'yicha arpa boshog'idagi donlar sonining (Y), boshogning uzunligiga (X) bog'liqligi tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

X	6	6,8	7	8	8,5	9	10	11	12	13	14	15
Y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

386. Quyidagi berilgan ma'lumotlar bo'yicha 1 ga yerdan olingan hosil miqdorning (Y) sarflangan o'g'it miqdoriga (X) bog'liqligi tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

X	6	7	7,5	8	9	9,5	10
Y	25	27	26	30	32	35	38

387. Quyidagi ma'lumotlar bo'yicha shakar zavodlari fondlari hajmiga (X) zavodlardagi bir sutkalik lavlagi sarflaning (Y) bog'liqligi regressiya tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

X (mln so'm)	120	150	250	270	350	370	400	420
Y (mln so'm)	4	6	6	7	8	8	8	10

388. Bir oylik ish haqi fondining (Y) ishlab chiqarilgan jami mahsulot hajmiga (X) bog'liqligini o'rganish maqsadida 10 ta sanoat korxonasi bo'yicha quyidagi ma'lumotlar olingan. tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

Korxonalar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (mln so'm)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
Y (mln so'm)	110	120	130	135	138	145	150	154	160	164

15-mavzu. Chiziqli korrelyatsiya. Tanlanma chiziqli regressiya tenglamasi

Y ning X ga **korrelyatsion bog‘liqligi** deb, $\bar{y}_x$ shartli o‘rtachaning x ga funksional bog‘liqligiga aytiladi⁸⁷:

$$y_x = f(x).$$

Bu tenglama Y ning X ga **regressiya tenglamasi** deb ataladi⁸⁸. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga regressiya chizig‘i deb ataladi.

X ning Y ga regressiya tenglamasi va regressiya chizig‘i ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

$$x_y = \varphi(y).$$

Agar Y ning X ga va X ning Y ga regressiya chizig‘ining ikkalasi ham to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsa, u holda korrelyatsiya chiziqli korrelyatsiya deyiladi.

Y ning X ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda $\bar{y}_x$ - shartli o‘rtacha qiymat, $\bar{x}$ va $\bar{y}$ tekshirilayotgan X va Y miqdorlardan olingan tanlanma uchun tanlanma o‘rtacha qiymatlari, σ_x va σ_y lar esa mos ravishda X va Y uchun tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishlari, r_T tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti.

X ning Y ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$$

1. Bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi 5 ta sanoat korxonalari bo‘yicha quyidagi mahsulotlar olingan.

Mehnatni elektr energiya bilan ta'minlanganligi- X (kvt/soat)	7,1	8,3	8,5	9	10,5
Mehnat unumdorligi – Y (dona)	14	16	14	15	17

Bu ma'lumotlardan foydalanib, mehnat unumdorligining (Y) elektr energiya bilan ta'minlanganlik darajasiga (X ga) bog‘liqligi regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamasini toping.

⁸⁷ Кремер Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр

⁸⁸ Кремер Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр

Yechish. Dastlab,

$$r_T = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y}$$

formuladagi zarur hisoblashlarni bajarib:

$$r_T = \frac{664.7 - 5 \cdot 8.68 \cdot 15.2}{5 \cdot 1.1 \cdot 1.6} = \frac{5.02}{6.38} \approx 0.79$$

tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini topamiz.

Endi yuqoridagi hisoblanganlarni

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

regressiya tenglamasiga qo'yib,

$$\bar{y}_x - 15.2 = 0.79 \cdot \frac{1.16}{1.1} (x - 8.68)$$

Sodda almashtirishlardan so'ng, regressiya tenglamasini

$$y = 0.82x + 8.08$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglama mehnat unumdorligini (Y ni) mehnatni elektr energiya bilan ta'minlanganlik darajasiga (X ga) korrelyatsion bog'liqligini ifodalaydi.

2. Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasini quyidagi korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha toping.

$X \backslash Y$	3	4	5	6	n_y
2	5	-	1	4	10
3	1	2	-	-	3
4	-	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	$n=25$

Yechish.

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6}{25} = \frac{18 + 24 + 30 + 42}{25} = 4.56$$

$$\bar{y} = \frac{10 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 12 \cdot 4}{25} = \frac{20 + 9 + 48}{25} = 3.08$$

$$\overline{x^2} = \frac{9 \cdot 6 + 16 \cdot 6 + 25 \cdot 6 + 36 \cdot 7}{25} = \frac{54 + 96 + 150 + 252}{25} = 22.08$$

$$\overline{y^2} = \frac{4 \cdot 10 + 9 \cdot 3 + 16 \cdot 12}{25} = \frac{40 + 27 + 192}{25} = 10.36$$

Yuqoridagilardan foydalanib, σ_x va σ_y ni topamiz.

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \sqrt{22.08 - 4.56^2} \approx 1.18$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} = \sqrt{10.36 - (3.08)^2} \approx 0.87$$

$\sum n_{xy} x_i y_i - n(\overline{xy})$ ni topish uchun quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

X \ Y	3	4	5	6	$U = \sum n_{xy} x$	$y \cdot U$
2	15 5 10	-	5 1 2	24 4 8	44	88
3	3 1	8 2	-	-	11	33
4	-	16 4 16	25 5 20	18 3 12	59	236
$V = \sum n_{xy} y$	13	22	22	20		$\sum y \cdot U = 357$
$x \cdot V$	39	88	110	120	$\sum x \cdot V = 357$	Tekshirish

Ikkala yig'indining bir xilga 357 ga teng ekanligi hisoblashlarning to'g'ri bajarilganligini ko'rsatadi. Jadval quyidagicha to'ldirilgan.

1 n_{xy} chastotaning x variantaga ko'paytmasini, ya'ni $n_{xy} \cdot x$ ni, bu chastotani o'z ichiga olgan katakning yuqori o'ng burchagiga yoziladi. Masalan, birinchi qator kataklarining yuqori o'ng burchaklarida $5 \cdot 3 = 15$; $1 \cdot 5 = 5$; $4 \cdot 6 = 24$ ko'paytmalar yozilgan.

2. Birinchi qator kataklarning yuqori o'ng burchaklarida joylashgan barcha sonlar qo'shiladi va ularning yig'indisini " U ustunning" shu qatordagi katagiga yoziladi. Masalan, birinchi qator uchun $U = 15 + 5 + 14 = 44$

3. Nihoyat y variantani U ga ko'paytiriladi va hosil bo'lgan ko'paytmani " $y U$ ustunning" tegishli katagiga yoziladi.

Masalan, jadvalning birinchi qatorida $y = 2$, $U = 44$.

Demak,

$$y \cdot U = 2 \cdot 44 = 88$$

4. “ $y \cdot U$ ustunning” barcha sonlarini qo‘shib, $\sum_y yU$ yig‘indi hosil qilinadi, U izlanayotgan $\sum n_{xy} x_i \cdot y_i$ yig‘indiga teng bo‘ladi. Masalan, yuqoridagi jadvalda $\sum n_{xy} x_i \cdot y_i = 357$.

Tekshirish maqsadida shunga o‘xshash hisoblashlar ustunlar bo‘yicha ham o‘tkaziladi. Izlanayotgan tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini topamiz:

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - nxy}{n\sigma_x \sigma_y} = \frac{357 - 25 \cdot 4.56 \cdot 3.08}{25 \cdot 1.18 \cdot 0.87} = \frac{5.58}{25.665} \approx 0.23$$

Yuqorida topilgan qiymatlarni $\bar{y}_x - \bar{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$ regressiya tenglamasiga qo‘yib,

$$y - 3.08 = 0.23 \cdot \frac{0.87}{1.18} \cdot (x - 4.56)$$

Sodda almashtirishlardan so‘ng regressiya tenglamasini

$$y = 0.17x + 2.3$$

ko‘rinishda yozamiz.

Mustaqil yechish uchun masalalar

389-394- masalalarda X va Y tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikasini hisoblang hamda Y ning X ga va X ning Y ga regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

389.

X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Y	0.321	0.282	0.266	0.245	0.232	0.227	0.214	0.208	0.201	0.200

X	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
Y	0.199	0.202	0.203	0.209	0.215	0.223	0.234	0.262

390.

X	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
Y	0.22	0.23	0.31	0.43	0.56	0.82	1.06	1.25	1.72	2.28

X	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
Y	2.67	3.26	3.72	4.32	5.11	5.98	5.64	7.02	8.32

391.

X	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
Y	15	16	24	17	26	30	31	36	32	40	42

X	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
Y	41	51	45	46	53	57	62	59	63

392.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	0.051	0.082	0.151	0.240	0.352	0.383	0.448	0.502	0.692	0.702

X	10	11	12	13	14	15	16	17
Y	0.798	0.875	0.956	1.160	1.249	1.482	1.723	1.986

393.

X	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8
Y	0.422	0.405	0.415	0.438	0.467	0.521	0.546	0.600	0.640	0.712

X	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
Y	0.832	0.871	0.988	1.268	1.408	1.500

394.

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Y	0.96	0.83	0.81	0.90	1.11	1.12	1.32	1.60	1.70

X	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
Y	1.90	2.36	2.77	3.28	3.31	4.35	4.78

395. Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasini quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha toping.

X \ Y	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n=100

396. Quyidagi korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha Y ning X ga va X ning Y ga regressiya to'g'ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

X \ Y	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	8
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	n=50

397. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha Y ning X ga va X ning Y ga regressiya to'g'ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

X \ Y	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17

200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	n=50

16-mavzu. Tanlanma korrelyatsion nisbat. Egri chiziqli va to'plamiy korrelyatsiya

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti miqdorlar orasidagi chiziqli bog'liqlik darajasini xarakterlashi bilan muhim ahamiyatga ega. Chiziqli bo'lmagan, yoki umuman, istalgan korrelyatsion bog'lanish zichligini qanday baholash mumkin, degan savol paydo bo'lishi tabiiydir. Istalgan korrelyatsion bog'lanish uchun korrelyatsion nisbat, deb ataluvchi quyidagi xarakteristika ishlatiladi. Y ning X ga nisbatan tanlanma korrelyatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x}}{\sigma_y}$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda:

$$\sigma_{y_x}^2 = \frac{\sum n_{x_i} (\bar{y}_{x_i} - \bar{y})^2}{n} \quad - \text{shartli o'rtachaning dispersiyasi,}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum n_{y_i} (y_i - \bar{y})^2}{n} \quad - Y \text{ tasodifiy miqdorning odatdagi shartsiz dispersiyasi.}$$

n - tanlanma hajmi

n_{x_i} - X belgi x_i qiymatining chastotasi,

n_{y_i} - Y belgi y_i qiymatining chastotasi,

$\bar{y}$ - Y belgining umumiy o'rtacha qiymati,

$\bar{y}_{x_i}$ - Y belgining $X=x_i$ sharti ostidagi shartli o'rtacha qiymati.

X tasodifiy miqdorning Y ga nisbatan tanlanma korrelyatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{x_y}}{\sigma_x} \quad (1)$$

Agar X va Y orasidagi korrelyatsion bog'lanish o'rganilayotgan bo'lib, $\bar{y}_x = f(x)$ yoki $\bar{x}_y = \varphi(y)$ regressiya funksiyalaridan hech bo'lmaganda birining grafigi egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo'lsa, korrelyatsiya egri chiziqli deyiladi.

Ba'zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki undan ko'p miqdorlar orasidagi bog'lanishni o'rganish zaruriyati tug'iladi. Bunday holdagi korrelyatsion bog'lanish to'plamiy (yoki ko'plik) korrelyatsiya deb ataladi. To'plamiy korrelyatsiyaning eng sodda holi bo'lgan chiziqli korrelyatsiyada X , Y va Z miqdorlar orasidagi korrelyatsion munosabat

$$Z = aX + bY + C$$

tenglama ko'rinishida ifodalanadi.

Z tasodifiy miqdor X va Y tasodifiy miqdorlar bilan bog'liqligining zichligi quyidagi to'plamiy korrelyatsiya koeffitsienti bilan baholanadi:

$$R_{z,xy} = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xz}^2}}, \quad (2)$$

shuningdek, Y ning tayin fiksirlangan qiymatida Z va X orasidagi bog'lanish zichligi

$$r_{xz}(y) = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2) \cdot (1 - r_{yz}^2)}}, \quad (3)$$

X ning tayin fiksirlangan qiymatida Z va Y orasidagi bog'lanish zichligi

$$r_{yz}(x) = \frac{r_{yz}^2 - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}}, \quad (4)$$

xususi korrelyatiya koeffitsientlari bilan baholanadi.

Agar regressiya grafigi egri chiziq bilan ifodalansa, xususan, ikkinchi tartibli parabolik korrelyatiya bo'lgan holda, Y ning X ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$$\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C \quad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi. Noma'lum A , B va C parametrlarini quyidagi tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{cases} (\sum n_x x^4)A + (\sum n_x x^3)B + (\sum n_x x^2)c = \sum n_x \bar{y}_x x^2 \\ (\sum n_x x^3)A + (\sum n_x x^2)B + (\sum n_x x)c = \sum n_x \bar{y}_x x \\ (\sum n_x x^2)A + (\sum n_x x)B + nc = \sum n_x \bar{y}_x \end{cases} \quad (6)$$

X ning Y ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$$\bar{x}_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1 \quad (7)$$

ham yuqoridagiga o'xshash topiladi.

1. $n=50$ hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo'yicha Y miqdorning X miqdorga korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping.

$Y \backslash X$	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

Yechish. $\bar{y}$ - umumiy o'rtachani topamiz.

$$\bar{y} = \frac{\sum n_i y_i}{n} = \frac{38 \cdot 15 + 12 \cdot 25}{50} = \frac{870}{50} = 17.4$$

umumiy o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_{y_i} (y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38 \cdot (15 - 17.4)^2 + 12 \cdot (25 - 17.4)^2}{50}} = 4.27$$

shartli o'rtachaning o'rtacha kvadratik chetlanishini topamiz:

$$\sigma_{y_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (y_x - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10 \cdot (21 - 17.4)^2 + 28 \cdot (15 - 17.4)^2 + 12 \cdot (20 - 17.4)^2}{50}} = 2.73.$$

Topilganlarni formulaga qo'ysak,

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_y} = \frac{2.73}{4.27} = 0.64.$$

2. Quyidagi korrelyatsion jadvaldagi ma'lumotlar bo'yicha

$$\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$$

regressiya tanlanma tenglamasini toping.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	-	-	20
3	1	20	-	-	-	21
5	3	5	10	2	-	20
10	-	-	7	12	-	19
17	-	-	-	-	20	20
n_x	22	26	18	14	20	n=100

Yechish. Quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

X	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x \cdot x$	$n_x \cdot x^2$	$n_x \cdot x^3$	$n_x \cdot x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
0	22	0,8	0	0	0	0	17,6	0	0
1	26	3,27	26	26	26	26	85,02	85,02	85,02
2	18	6,67	36	72	144	288	120,06	240,12	480,24
3	14	9,3	42	126	378	1134	130	390	1170
4	20	17	80	320	1280	5120	340	1360	5440
Σ	100		184	544	1828	6568	692,68	2075,14	7175,26

Jadvalning oxirgi satrida turgan sonlarni (6) ga qo'yib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 6568A + 1828B + 544C = 7175,26; \\ 1828A + 544B + 184C = 2075,14; \\ 544A + 184B + 100C = 692,68. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $A=0,66$; $B=1,23$ va $C=1,07$ ekanligini topamiz. Topilgan bu koeffitsientlarni (5) ga qo'yib,

$$\bar{y}_x = 0,66x^2 + 1,23x + 1,07$$

ni hosil qilamiz.

3. Biror mutaxassislikka mansub ishchilarning mehnat unumdorligi (X), yoshi (Y) va mehnat staji (Z) ning o'zaro bog'liqligini tekshirish maqsadida 100 ta ishchi ajratib olindi. Bu belgilarning juft-juft bog'liqligi tekshirilgan bo'lib, quyidagi ma'lumotlar olingan: $r_{xy} = 0,20$; $r_{xz} = 0,41$; $r_{yz} = 0,82$. X ning Y va Z lar bilan bog'liqligining zichligi ($R_{x,yz}$) ni va xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari ($r_{xy,z}$, $r_{xz,y}$, $r_{yz,x}$) ni aniqlang.

Yechish. Masalada X ning Y va Z lar bilan bog'liqligining zichligi ($R_{x,yz}$) ni topish uchun (2) formuladan foydalanamiz:

$$R_{x,yz} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 - 2 \cdot r_{xy} \cdot r_{xz} \cdot r_{yz} + r_{xz}^2}{1 - r_{yz}^2}} = \sqrt{\frac{0,20^2 - 2 \cdot 0,20 \cdot 0,41 \cdot 0,82 + 0,41^2}{1 - 0,82^2}} =$$

$$= \sqrt{0,225} = 0,47;$$

Demak, ishchilarning mehnat unumdorligi bir tomondan ularning yosh ko'rsatkichlari, ikkinchi tomonidan esa mehnat stajlari bilan sezilarli darajada bog'liq ekan.

Endi quyidagi to'plamiy korrelyatsiya koeffitsientlarini baholaymiz:

$$r_{xy,z} = \frac{r_{xy}^2 - r_{xz} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}} = \frac{0,20^2 - 0,41 \cdot 0,82}{\sqrt{(1 - 0,41^2)(1 - 0,82^2)}} = -0,26;$$

$$r_{xz,y} = \frac{r_{xz}^2 - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}} = \frac{0,41^2 - 0,20 \cdot 0,82}{\sqrt{(1 - 0,20^2)(1 - 0,82^2)}} = 0,44;$$

$$r_{yz,x} = \frac{r_{yz}^2 - r_{xy} r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}} = \frac{0,82^2 - 0,20 \cdot 0,41}{\sqrt{(1 - 0,20^2)(1 - 0,41^2)}} = 0,83;$$

Xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari bo'yicha quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

Ishchilarning mehnat unumdorligi (X) bilan ularning yosh ko'rsatkich (Y) lari orasida to'g'ri korrelyatsion bog'lanish mavjud ($r_{xy} = 0,20$). Agar unga uchinchi omil, ya'ni mehnat staji (Z) ning bog'liqligi hrganilganda teskari korrelyatsion bog'lanish mavjudligini ko'rish mumkin ($r_{xy,z} = -0,26$).

Buni mehnat faoliyatining ma'lum bir davridagini inson organizmining mehnatga layoqatlilik darajasi eng yuqori bo'lishi bilan izohlash mumkin.

Xuddi shu kabi boshqa xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari haqida ham fikr bildirish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

398-401- masalalarda $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ kvadratik regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

398.

X	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
Y	0.4	0.3	1.0	1.7	2.1	3.4	4.1	5.8	7.7

X	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
Y	9.4	11.4	13.6	15.6	18.6	21.2	24.1

399.

X	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6
Y	0.43	0.94	1.91	3.01	4.0	4.56	6.45	8.59	11.15

X	4.0	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8
Y	13.88	16.93	20.47	24.15	28.29	32.61	37.41	42.39

400.

X	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
Y	25	26	4	7	6	13	30	26	32	40

X	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
Y	32	21	11	5	16	3	21	22	19	32

401.

X	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
Y	0.22	0.23	0.31	0.43	0.56	0.82	1.06	1.25	1.72	2.28

X	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
Y	2.67	3.26	3.72	4.32	5.11	5.98	6.64	7.02	8.32

402. Quyidagi jadvalda berilgan ma'lumotlar bo'yicha $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni toping.

$X \backslash Y$	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15
200	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	n=100

403. Korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha $\bar{x}_y = A_1y^2 + B_1y + C_1$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni aniqlang.

$X \backslash Y$	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
3	1	14	-	15
4	-	2	18	20
n_x	16	16	18	n=50

404. Quyidagi ma'lumotlar bo'yicha $\bar{x}_y = A_1y^2 + B_1y + C_1$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni aniqlang.

$X \backslash Y$	1	9	19	n_y
0	13	-	-	13
2	2	10	-	12
3	-	1	23	25
n_x	16	11	23	n=50

405-408- masalalarda to'plamiy korrelyatsiya koeffitsienti topilsin va Z ning X, Y ga nisbatan chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi tuzilsin.

405.

X	1	-1	2	1	-1	-4	7	0	8	3	6	-2
Y	-1	1	-2	-6	-8	5	3	-3	0	-10	2	7
Z	2	0	1	-4	-8	4	11	-2	9	8	10	5

406.

X	1	4	0	5	-3	3	-5	-1	2	-2
Y	4	-6	2	-4	12	-2	14	6	0	8
Z	-4	-5	4	-1	4	0	5	1	2	7

407.

X	31	34	35	41	38	32	29	34
Y	29.5	14.2	18.0	21.3	47.5	10.0	21.0	36.5
Z	22.0	14.0	23.0	43.0	66.0	7.6	12.0	36.0

408.

X	0	44	4	61	35	64	13	56	18	2
Y	14	0	29	34	54	16	44	59	49	32
Z	0.5	47.2	8.0	63.8	18.2	47.5	0.0	60.9	19.2	9.0

17-mavzu. Statistik gipotezalar va ularni tekshirish

Statistik gipoteza⁸⁹ deb, noma'lum taqsimot qonunining ko'rinishi haqidagi yoki uning ma'lum biror hossasi haqidagi bildirilgan har qanday farazga aytiladi. O'rganilayotgan muhit uchun eng maqul va uni tekshirish zarur deb bildirilgan gipoteza **nolinchi** (asosiy) gipoteza deb ataladi va uni H_0 bilan belgilanadi. Nolinchi gipotezadan boshqa har qanday gipotezalar alternativ gipoteza deyiladi va ularni $H_1, H_2, \dots$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar gipoteza X tasodifiy miqdor noma'lum taqsimot qonunini bir qiymatli aniqlasa, u holda uni **oddiy** gipoteza deyiladi. Oddiy gipotezadan boshqa har qanday gipotezalar **murakkab** gipoteza deyiladi.

Agar gipoteza noma'lum taqsimot qonuni parametrlarining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari haqida bo'lsa, uni **parametrik** gipoteza deyiladi.

Nolinchi (asosiy) gipotezani qabul qilish yoki qabul qilmaslikni aniqlash uchun ishlab chiqilgan har qanday qoidaga (statistik) kriteriy deyiladi. Odatda kriteriyalar nazriy taqsimot qonun bilan empirik taqsimot qonun orasidagi farqqa asoslangan va H_0 gipoteza to'g'ri bo'lgan holatda yoki aniq, yoki jadvashtirilgan taqsimot qonuniga ega bo'lgan $T_n = T_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistika ko'rinishida quriladi. So'ngra kriteriyni qiymati nazriy taqsimot qonun bilan empirik taqsimot qonun orasidagi farq "katta" deb hisoblangan holatga mos keluvchi sohaga (K -kritik sohaga) tushib qolsa, amaliyot nazariyaga muvofiq kelmadi deb, H_0 gipoteza inkor qilinadi. Aks holda kriteriyni qiymati K ga (gipotezani qabul qilish sohasiga) tushib qolganida nolinchi gipotezani inkor etish uchun asos yo'qligi sababli uni qabul qilamiz deyiladi.

Ko'pincha kritik soha bilan gipotezaning qabul qilinish sohasi intervallardan iborat bo'lib, ularni bir qancha nuqtalar ajratib turadi. Bu nuqtalar **kritik nuqtalar** deyiladi. Kritik sohalar quyidagicha bo'lishi mumkin:

- a) o'ng tomonlama kritik soha: $\{T_n \geq T_{kr}\}$;
- b) chap tomonlama kritik soha: $\{T_n < T_{kr}\}$;
- c) ikki tomonlama kritik soha: $\{|T_n| > T_{kr}\}$.

H_0 gipoteza to'g'riligi sharti ostida T_n statistikaning kritik sohaga tushish ehtimoli α uning **qiymatdorlik darajasi** deyiladi.

Gipotezani statistik tekshirishi jarayonida ikki xil turdagi xatoga yo'l qo'yilish mumkin.

Birinchi tur xato shuki, bunda aslida to'g'ri bo'lgan gipoteza kriteriyni qiymati kritik sohaga tushganligi sababli rad etiladi. Yuqoridagi ta'rifga ko'ra, birinchi tur xatolik ehtimoli α ga teng ekanligini sezish qiyin emas.

Ikkinchi tur xato shuki, bunda aslida noto'g'ri bo'lgan gipoteza kriteriyni qiymati gipotezani qabul qilish sohasiga tushganligi sababli qabul qilinadi. Ikkinchi tur xatolik ehtimolini β yordamida belgilanadi.

⁸⁹ Кремер Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр

Kriteriyning quvvati deb, alternativ gipoteza o'rinli bo'lish sharti ostida T_n kriteriyning qiymati kritik sohaga tushishi ehtimoliga aytiladi. Bu yerda ham yuqoridagi ta'rifga asosan, kriteriy quvvati $1 - \beta$ ga teng ekanligini sezish qiyin emas. Bundan esa kriteriyning quvvati qancha katta bo'lsa, ikkinchi tur xatolik ehtimoli shuncha kichik bo'lishi kelib chiqadi.

H_0 gipotezani tekshirish uchun keltirilishi mumkin bo'lgan kriteriylar ichida maksimal quvvatga ega bo'lgan kriteriy **tekis eng quvvatli kriteriy** deyiladi.

1. Zavodda ishlab chiqarilayotgan avtomobillar har 100 km ga 10 *litr* benzin sarflaydi. Yoqilg'i sarfini kamaytirish maqsadida dvigitelga ma'lum bir o'zgartirishlar kiritildi. Shunday o'zgartirish kiritilgan 25 ta avtomobil tajribadan o'tkazilganida ularning har 100 kmga sarflagan yoqilgilarining o'rtachasi $\bar{X} = 9,3$ *litr* ekanligi aniqlandi. Avtomobillarning yoqilg'i sarfi matematik kutilmasi a dispersiyasi $\sigma^2 = 4$ *litr*² bilan normal taqsimlangan deb faraz qilib, H_0 : konstruksiyada qilingan o'zgarish yoqilg'i sarfiga ta'sir qilmadi, deb bildirilgan gipotezani tekshiring. Qiymatdorlik darajasini $\alpha = 0,05$ deb oling.

Yechish. Agar

H_0 : yoqilg'i sarfi matematik kutilmasi $a=10$, dispersiyasi $\sigma^2 = 4$ *litr*² bilan normal taqsimlangan bo'lsa, u holda alternativ gipoteza

H_1 : yoqilg'i sarfi matematik kutilmasi $a < 10$, dispersiyasi $\sigma^2 = 4$ *litr*² bilan normal taqsimlangan bo'ladi.

Statistik kriteriy sifatida $\bar{X}$ tanlanma o'rtachani o'zini olamiz. Tanlanma normal taqsimlangan bosh to'plamdan bo'lganligi uchun $\bar{X}$ ham matematik kutilmasi a , dispersiyasi $\frac{\sigma^2}{25}$ bo'lgan normal taqsimotga ega. H_0 - gipoteza o'rinli bo'lgan shart ostida $a=10$ bo'lib, quyidagi

$$U = \frac{\bar{x} - 10}{\sqrt{\frac{4}{25}}}$$

statistika $N(0,1)$ standart normal taqsimot qonuniga ega.

u_α standar normal taqsimot qonunu $N(0;1)$ ning $\alpha = 0,05$ tartibli kvantili bo'lsin, u holda kritik soha sifatida $\{U < u_\alpha\}$ ni olamiz. Jadvaldan, $u_\alpha = -u_{0,95} = -1,645$ topamiz.

Statistik kriteriyning tanlanma qiymati

$$U_n = \frac{9,3-10}{\sqrt{\frac{4}{25}}} = -1,75.$$

$U_n < u_\alpha$ bo'lganligi uchun H_0 gipoteza inkor etiladi, yani konstruksiyada qilingan o'zgarish yoqiligi sarfini kamayishiga olib keldi, degan hulosaga chiqariladi.

2. Yuqoridagi misolning sharti asosida H_0 gipotezaga alternati gipoteza $H_1 : a=9$ va statistik kriteriy sifatida $\bar{X}$ olingan bo'lsin, u holda $\{\bar{X} < 9,44\}$ kritik soha uchun birinchi tur va ikkinchi tur hatoliklar ehtimolini tiping.

Yechish. H_0 - gipoteza o'rinli bo'lganligi sharti ostida $\bar{X}$ statistika $N(10; \sqrt{4/25})$ taqsimot qonunga ega bo'ladi, bundan esa

$$\alpha = P(\bar{X} < 9,44; H_0 : a = 10) = F\left(\frac{9,44-10}{\sqrt{4/25}}\right) = F(-1,44) = 1 - F(1,44) \approx 0,08$$

H_1 gipoteza o'rinli bo'lganligi sharti ostida esa $\bar{X}$ statistika $N(9; \sqrt{4/25})$ taqsimot qonunga ega bo'ladi, bundan

$$\beta = P(\bar{X} \geq 9,44; H_1 : a = 9) = 1 - F\left(\frac{9,44-9}{\sqrt{4/25}}\right) = 1 - F(-1,1) \approx 0,136.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

409. Stanokda avtomat diametri 10 mm bo'lgan sharchalar ishlab chiqariladi. X tasodifiy miqdor ishlab chiqarilayotgan sharchalar diametrining 10 mm dan farqi bo'lib, matematik kutilmasi a , dispersiyasi $\sigma^2 = 0,1 \text{ mm}^2$ bo'lgan normal taqsimot qonunga ega. Quyidagi:

$$H_1 : a = 0;$$

$$H_2 : a \neq 0;$$

$$H_3 : -1 \leq a \leq 1.$$

H_4 : sharcha ishlab chiqarilayotgan materialga maxsus yumshatuvchi modda qo'shilgan, deb bildirilgan gipotezalarning qaysi biri statistik, qaysi biri oddiy va qaysi biri murakkab gipoteza bo'ladi.

410. Bir kunda bankka kelgan 50 ta mijozdan X tasi bank operatsiyasini bajardi.

Quyida berilgan gipotezalarning qaysi biri statistik, qaysi biri oddiy va qaysi biri murakkab gipoteza bo`ladi:

H_1 : X tasodifiy miqdor $B(50, 1/2)$ taqsimot qonunga ega;

H_2 : X tasodifiy miqdor $B(50, p)$ taqsimot qonunga ega bo`lib, bu yerda $\frac{1}{3} \leq p \leq \frac{2}{3}$;

H_3 : X tasodifiy miqdor $B(50, p)$ taqsimot qonunga ega bo`lib, bu yerda $p \neq 1/2$;

H_4 : $P(X \geq 15) \geq 1/2$;

411. H_0 gipotezani tekshirish jarayonida quyidagi holatlar yuz berdi:

a) H_0 gipoteza to`g`ri, lekin kriteriy qiymatiga ko`ra uni inkor qilish kerak;

b) H_0 gipoteza noto`g`ri, lekin kriteriy qiymatiga ko`ra uni qabul qilish kerak;

c) H_0 gipoteza to`g`ri va kriteriy qiymatiga ko`ra uni qabul qilish kerak;

d) H_0 gipoteza noto`g`ri va kriteriy qiymatiga ko`ra uni inkor qilish kerak. Yuqoridagi holatlarda nechanchi tur hatolik yuz bergan.

412. Qurilmani ishga yaroqliligini tekshirish maqsadida “maxsus tuzilgan test”dan o`tkaziladi. Agar qurilma yaroqli bo`lsa, uni testdan o`tishi ehtimoli 0,99 ga, aks holda 0,40 ga teng. Qurilma ketma-ket 5 marotaba testdan o`tsa, ishlatish uchun yaroqli deb tavsiya qilinadi, aks holda yaroqsiz deb topiladi. Agar qurilmaning testdan o`tishlari soni Binomial taqsimot qonunga bo`ysunadi deb hisoblansa, quyidagi savollarga javob bering:

a) statistik kriteriyning qiymatlar sohasi va kritik sohasi qanday? Statistik kriteriyning o`zi qanday taqsimot qonuniga bo`ysunadi?

b) agar 1-tur hatolik aslida yaroqli bo`lgan qurilmani yaroqsiz deb topish bo`lsa, u holda H_0 gipotezani qanday ifodalash mumkin?

c) alternativ gipoteza qanday ifodalanadi va 2-tur hatolik nimadan iborat?

d) 1- va 2-tur hatoliklar ehtimollari nechaga teng?

413. Sotish uchun keltirilgan katta partiyadagi mahsulotning qandaydir qismi yaroqsiz. Ta`minotchining fikricha bu 5% ni tashkil qiladi. Lekin iste`molchi bu 10% ni tashkil qiladi, deb hisoblaydi. Mahsulot oldi-sotdi sharti quyidagicha kelishib olindi: katta partiyadagi mahsulotlar ichidan tavakkaliga 10 tasi ajratib olinadi va uni tekshiriladi. Agar unung ichida yaroqsizlari soni bittadan ko`p bo`lmasa, mahsulot ta`minotchi sharti bo`yicha, aks holda iste`molchi sharti bo`yicha qabul qilinadi. Bu masalani statistik gipotezalarni tekshirish kriteriylari nazariyasi atamaları yordamida ifodalang va quyidagi savollarga javob bering:

a) qanday statistik kriteriylar bo`lishi mumkin? Uning qiymatlar sohasini va kritik sohasini ko`rsating;

b) statistik kriteriy taqsimot qonunining ko`rinishi qanday?

c) asosiy va alternativ gipotezalar nimadan iborat?

d) 1- va 2-tur hatolar nimadan iborat?

414. Standart o'lchovi $a=40mm$ bo'lgan boltning ishlab chiqaruvchi stanokning mahsulotini tekshirish maqsadida $n=36$ ta tanlanma ajratib olindi. Tekshirilgan mahsulotlarning tanlanma o'rtachasi $\bar{x}=40,2 \text{ mm}$ ekanligi aniqlandi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra, bolt o'lchovi dispersiyasi $\sigma^2=1 \text{ mm}^2$ bo'lgan normal taqsimotga bo'ysunishi aniqlangan bo'lsa, $\alpha=0,01$ qiymatdorlik darajasi bilan stanok sozlanishi musbat tomonga suljimgan, deb qarash mumkinmi? Bunda kritik soha qanday bo'ladi?

415. Yuqoridagi masalada $H_0: a=40 \text{ mm}$ asosiy gipotezani unga alternativ $H_1: a=40,3 \text{ mm}$ gipoteza bilan tekshirishda 1-tur hatolik ehtimoli $\alpha=0,1$ bo'lib, 2-tur hatolik ehtimoli $\beta \leq 0,01$ ni qanoatlantirishi uchun olinishi mumkin bo'lgan eng kichik tanlanma hajmini toping. Bu tanlanma hajmiga qanday kritik soha mos keladi?

18- mavzu. Gipotezalarni Pirsonning muvofiqlik kriteriysi bo'yicha tekshirish

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tanlanma berilgan bo'lib, u asosida bosh to'plamning $F(x)$ taqsimot funksiyasini aniqlash kerak bo'lsin.

Muvofiqlik kriteriysi⁹⁰ deb, taqsimot funksiyaning aniq ko'rinishi haqida H_0 gipotezani qabul qilish yoki rad etishga imkon beradigan kriteriyga aytiladi.

Muvofiqlik kriteriylaridan biri bo'lgan Pirsonning «xi-kvadrat» kriteriysini qurish bilan tanishamiz.

Buning uchun kuzatish olib borilayotgan X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari sohasini o'zaro kesishmaydigan $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k)$ intervallarga ajratamiz.

$p_i = P(X \in \Delta_i)$ - X tasodifiy miqdorning Δ_i intervalga tushishining nazariy ehtimoli bo'lsin. Bu ehtimol H_0 gipotezadan kelib chiqqan holda hisoblanadi, ya'ni X tasodifiy miqdor $F_\theta(x)$ taqsimot funksiyaga ega deb faraz qilinadi.

n_i - tanlanma elementlarining Δ_i intervalga tushganlarning soni (ya'ni Δ_i sohaning chastotasi) bo'lsin.

Bunda $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ va $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ o'rinli bo'ladi.

Agar tanlanmaning hajmi yetarlicha katta ($n > 30$) bo'lsa, taqsimotni taqriban normal taqsimot deb olish mumkin.

Ushbu

$$\xi_i = \frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i}}, \quad i = \overline{1, k};$$

tasodifiy miqdorlarni qaraymiz.

Teorema. Agar H_0 gipoteza to'g'ri va $np_i > 5$ bo'lsa, u holda $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \xi_i^2$ tasodifiy miqdor $k-1$ ozodlik darajali «xi-kvadrat» taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorga taqsimot bo'yicha yaqinlashadi.

Demak, Pirsonning muvofiqlik kriteriysini quyidagicha ta'riflash mumkin.

⁹⁰ Крeмep Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 330 стр

Berilgan α qiymatdorlik darajasi yordamida $k-1$ ozodlik darajali «xi-kvadrat» taqsimot qonun jadvalidan $1-\alpha$ -tartibli kvantill, ya'ni $\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ topiladi. So'ngra tanlanma ma'lumotlariga ko'ra, χ^2 kriteriyning kuzatilgan qiymati hisoblanadi, agar u qiymat qabul qilish sohasiga tushsa, ya'ni $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ bo'lsa, H_0 gipotezani inkor etishga asos yo'q deb uni qabul qilinadi, va agar $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ bo'lsa, u holda H_0 gipoteza rad etiladi.

Agar nazariy chastotalarni hisoblashda $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$ parametrlarni baholashga to'g'ri kelsa, u holda kritik qiymat $k-l-1$ ozodlik darajali «xi-kvadrat» taqsimot qonuni bo'yicha topiladi.

1. Bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan:

Δ_i	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)
n_i	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

Nazariy taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 qiymatdorlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida tekshiring.

Yechish:

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 70$$

Quyidagi jadvalni topamiz:

X	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
W	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

U holda,
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} w_i x_i = 24,43;$$

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{10} w_i x_i^2 = 782,67;$$

$$s_n^2 = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = 185,92;$$

$$s_n = \sqrt{185,92} \approx 13,63.$$

X tekis taqsimot qonuniga ega bo'lgani uchun

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

a va b ni aniqlash uchun quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 24.43 \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = 13.63 \end{cases}$$

Bundan

$$a=0,85; \quad b=48,01;$$

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{47.16} = 0.0212$$

Shunday qilib, X ning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0.85, \\ 0.0212, & \text{agar } 0.85 \leq x \leq 48.01, \\ 0, & \text{agar } x > 48.01. \end{cases}$$

Endi tekis taqsimot bo'yicha X tasodifiy miqdorning $[0;5)$, $[5;10)$, ..., $[45;50)$ oraliqlarga tushish ehtimollarini topamiz.

$$p_1 = P(0 < X < 5) = P(0.85 < X < 5) = \int_{0.85}^5 0.0212 dx = 0.0212x \Big|_{0.85}^5 = 0.088$$

$$p_2 = P(5 < X < 10) = \int_5^{10} 0.0212 dx = 0.106$$

.....

$$p_{10} = P(45 < X < 50) = \int_{45}^{48.01} 0.0212 dx = 0.064$$

Topilgan qiymatlarni jadval ko'rinishda yozsak:

Δ_i	[-5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
p_i	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106

Δ_i	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)	[50;55)
p_i	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

Shundan so'ng, χ^2 statistikaning amaliy qiymatini hisoblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

n_i	p_i	$n_i p_i$	$(n_i - n_i p_i)^2$	$\frac{(n_i - n_i p_i)^2}{n_i p_i}$
2	0,088	6,16	17,3058	2,8094
12	0,106	7,42	20,9764	2,872
8	0,106	7,42	0,3365	0,0454
4	0,106	7,42	11,6964	1,51
14	0,106	7,42	43,2964	5,835
6	0,106	7,42	2,0164	0,272
10	0,106	7,42	6,6564	0,897
2	0,106	7,42	29,3764	3,954
	0,106			
$12 = \begin{cases} 1 \\ 11 \end{cases}$	0,064	$11,9 = \begin{cases} 7,42 \\ 4,48 \end{cases}$	0,01	0,0008
$\sum n_i = 70$	$\sum p_i = 1$	$\sum n_i p_i = 70$		18,1948

Shunday qilib,

$$\chi^2 = 18,1948.$$

χ^2 taqsimot jadvalidan: $\chi^2_{1-\alpha}(k-l-1) = \chi^2_{0,95}(6) = 12,6.$

Demak, $\chi^2 > 12,5$ bo'lgani uchun bosh to'plamning taqsimot funksiyasi 0,05 qiymatdorlik darajasi bilan tekis taqsimotga mos kelmaydi, degan xulosaga ega bo'lamiz.

1. Bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan:

Δ_i	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
n_i	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

Nazariy taqsimot funksiyasi normal taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 qiymatdorlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

Yechish:

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 50; \quad w_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = \overline{1;10};$$

deb olib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

x_i	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
w_i	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,20	0,14	0,10	0,04	0,02

U holda,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i=1}^{10} x_i w_i = 15; \\ s_n^2 &= \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = 34,65; \\ s_n &= 5,9. \end{aligned}$$

Endi $p_i = P(X \in \Delta_i), i = \overline{1,10}$ ehtimollarni hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} p_1 &= (0 < X < 3) = P\left(\frac{0-15}{5,9} < \frac{X-M(X)}{D(X)} < \frac{3-15}{5,9}\right) = \\ &= \Phi(-2,03) - \Phi(-2,5) = \Phi(2,5) - \Phi(2,03) = \\ &= 0,4938 - 0,4784 = 0,0154 \approx 0,02, \dots \end{aligned}$$

va hokozo.

Bu yerda,
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Xuddi shunga o'xshash, qolganlarini hisoblab, quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

Δ_i	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
n_i	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09	0,04	0,02

Yuqoridagilardan foydalanib, “xi-kvadrat”ning statistik qiymatini hisoblash uchun jadval tuzamiz.

Δ_i	n_i	p_i	$n_i p_i$	$(n_i - n_i p_i)^2$	$\frac{(n_i - n_i p_i)^2}{n_i p_i}$
[0;3)	$8 = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$	0,02	$7,5 = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4,5 \end{cases}$	0,5	0,0333
[3;6)		0,04			
[6;9)		0,09			
[9;12)		0,15			
[12;15)	6	0,19	7,5	1,5	0,3
[15;18)	11	0,19	10	1	0,1
[18;21)	10	0,15	10	0	0
[21;24)	7	0,09	7,5	0,5	0,3
[24;27)	$8 = \begin{cases} 5 \\ 2 \\ 1 \end{cases}$	0,04	$7,5 = \begin{cases} 4,5 \\ 2 \\ 1 \end{cases}$	0,5	0,0333
[27;30)		0,02			
Σ	50	1	50		0,7666

Bundan $\chi^2 = 0,7666$.

χ^2 taqsimot jadvalidan: $\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1) = \chi_{0,95}^2(3) = 7,81$ bo'lib, $\chi^2 < 7,81$ bo'lgani uchun bosh to'plamning taqsimot funksiyasi normal taqsimotga mos keladi, degan xulosaga ega bo'lamiz.

“Xi-kvadrat” kriteriysi tasodifiy miqdorlarning bog'liqligini haqidagi gipotezaga ham qo'llash mumkin:

Faraz qilaylik, $(x_1(1); y_1(1)), (x_1(2); y_1(2)), \dots, (x_1(n); y_1(n))$ tanlanma juftligi berilgan bo'lib, quyidagi $H_0 : X$ va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas, ya'ni

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j; \quad (1)$$

gipotezani tekshirish talab qilinayotgan bo'lsin. Bu munosabatning o'ng tomonidagi ehtimollarni, ya'ni $p_i; q_j$ nazriy ehtimollarning baholarini mos ravishda

$\tilde{p}_i = \frac{n_i}{n}, \quad \tilde{q}_j = \frac{n_j}{n}$ orqali belgilaymiz. U holda o'ng tomondagi ekspremental chastota

$\tilde{n}_{ij} = n\tilde{p}_i\tilde{q}_j = \frac{n_i n_j}{n}$ bilan chap tomonidagi ekspremental chastota n_{ij} o'rtasidagi farqqa asoslangan kriteriy

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{n_{ij}}, \quad (2)$$

Bu (2) statistikaning qiymatini unga ekvivalent quyidagi formula yordamida hisoblash qulayroq

$$\chi^2 = n \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{n_{ij}^2}{n_i n_j} - 1 \right) = n \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\tilde{n}_{ij}^2}{n_j} \right) - 1 \right) \quad (3)$$

H_0 gipoteza to'g'riligi sharti ostida $(k-1)(m-1)$ ozodlik darajasiga ega "xi-kvadrat" taqsimot qonunli tasodifiy miqdorga intiladi. Shuning uchun χ^2 statistikaning amaliy qiymati $1-\alpha$ -tartibli $(k-1)(m-1)$ ozodlik darajasiga ega "xi-kvadrat" taqsimot kvantilli $\chi^2(k-1)(m-1)_{1-\alpha}$ oshsa H_0 inkor etiladi, aks holda α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi.

2. Korxona uchta A, B va C ta'minotchidan bir xil turdagi xom ashyo sotib oladi. Xom ashyolarni tekshirish natijasida quyidagi ma'lumotlar olingan:

Tekshirishlar natijasi	Ta'minotchilar			Hammasi bo'lib
	A	B	C	
Yaroqli mahsulotlar	29	38	53	120
Yaroqsiz mahsulotlar	1	2	7	10
Jami	30	40	60	130

Mahsulot sifatini ta'minotchiga bog'liq emas, deb hisoblash mumkin-mi? $\alpha = 0,1$ da tekshiring.

H_0 : mahsulotning ikki xususiyatining bog'liq emasligi, haqidagi gipotezani tekshiramiz.

Buning uchun (3) formuladan foydalanib quyidagi qiymatni topamiz:

$$\chi^2 = 130 \cdot \left(\frac{29^2}{30 \cdot 120} + \frac{38^2}{40 \cdot 120} + \frac{53^2}{60 \cdot 120} + \frac{1^2}{30 \cdot 120} + \frac{2^2}{40 \cdot 120} + \frac{7^2}{60 \cdot 120} - 1 \right) \approx 2,546.$$

Ozodlik darajasi esa $(2-1) \cdot (3-1) = 2$. U holda $\chi^2(2)_{0,9} \approx 4,61$.

Demak, mahsulot sifati ta'minotchiga bog'liq emas.

Mustaqil yechish uchun masalalar

416. Bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan.

Δ_i	[4,1;4,2)	4,2;4,3)	[4,3;4,4)	[4,4;4,5)	[4,5;4,6)	[4,6;4,7)	[4,6;4,7)	4,8;4,9)	4,9
n_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Nazariy taqsimot funksiyasi normal taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligi 0,05 qiymatdorlik daraja bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

417. Bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan.

Δ_i	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
n_i	11	14	15	10	14	16

Nazariy taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq emasligini 0,05 aniqlilik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

418. Pirson kriteriysidan foydalanib, 0,05 qiymatdorlik darajasida ushbu $n=200$ hajmli tanlanma olingan. Bosh to'plamning taqsimot qonuni normal taqsimlangan ekanligi haqidagi gipotezaga muvofiq kelish-kelmasligini tekshiring.

Δ_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

419. Pirson kriteriysidan foydalanib, 0,01 qiymatdorlik darajasida n_i empirik va np_i nazariy chastotalar orasidagi farq tasodifiymi, yoki muhimmi ekanligini aniqlang. Nazariy chastotalar bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan.

n_i	8	16	40	72	36	18	10
np_i	6	18	36	76	39	18	7

420. Ikki tanga bir vaqtda 20 marta tashlanganida “Gerb” tomoni tushishlar hodisasining yuz berishlari soni quyidagi jadvalda keltirilgan.

Har ikkala tangada gerb tushishlari soni	0	1	2
Hodisa yuz bergan tashlashlar soni	4	8	8

Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida ikkala tangani ham simmetrik, deb hisoblash mumkin-mi? $\alpha=0,05$ deb qabul qiling (jadvalda: $\chi^2(2)_{0,95} \approx 5,99$.)

421. O‘yin kubi 120 marta tashlanganida 40 marta olti ochkosi tushdi. Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida tashlanayotgan o‘yin kubini to‘g‘ri o‘yin kubi, deb hisoblash mumkin-mi? $\alpha=0,05$ deb qabul qiling (jadvalda: $\chi^2(1)_{0,95} \approx 3,84$.)

422. Pirson kriteriysidan foydalanib, $\alpha=0.05$ qiymatdorlik darajasida n_i empirik chastotalar bilan bosh to‘planning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan np_i nazariy chastotalar orasidagi farqning tasodifiy yoki muhimligini aniqlang.

n_i	5	10	20	8	7
np_i	6	14	18	7	5

423. Tanga 50 marta tashlanganida 20 marta “gerb” hodisasi yuz berdi. Pirsonning muvofiqlik kriteriysiga asosan tashlangan tangani simmetrik deb qabul qilis mumkinmi? Qiymatdorlik darajasi $\alpha=0.1$ deb oling (jadvalda: $\chi^2(1)_{0,99} \approx 2,71$).

424. Shahar 5 ta tumanga ajratilgan. Quyida bu tumanlarga tarqatilgan mahsulotning (shartli birlikdagi) hajmi haqidagi ma‘lumot keltirilgan.

Tumanlar	1-tuman	2-tuman	3-tuman	4-tuman	5-tuman
Mahsulot hajmi	110	130	70	90	100

Yuqoridagi ma‘lumot H_0 : mahsulot barcha tumanlarga teng taqsimlangan, deb bildirilgan gipotezaga muvofiqmi? Qiymatdorlik darajasi $\alpha=0.1$.

425. Radioelektron apparatura biror T muddat ichida tajribadan o‘tkazildi. Agar biror apparatura shu muddat ichida ishdan chiqsa, u ta‘mirlanib yana qayta ishga tushirildi. 59 ta apparaturaning tajribalar natijasi quyida keltirilgan:

Ishdan chiqishlar soni	0	1	2	3
Sinalgan apparaturalar soni	42	10	4	3

$\alpha=0.1$ qiymatdorlik darajasi bilan H_0 : har bir apparaturaning ishdan chiqishlari soni Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi, deb bildirilgan gipotezani tekshiring.

426. Odatda inson istemol qiladigan dorining ta'siri, uni qabul qilish usullariga bog'liq, deb ta'kidlanadi. Ushbu farazni $\alpha=0.05$ qiymatdorlik darajasi bilan quyidagi ma'lumotlar asosida tekshiring.

Natija	Qabul qilish usullari		
	A	B	C
yomon	11	17	16
yaxshi	20	23	19

427. Korhonada qo'llanilgan A , B va C texnologiyaning mehnat unimdorligining o'zgarishiga olib kelishini quyidagi ma'lumotlar yordamida tekshiring.

Mehnat unimdorligi	Qo'llanilgan texnologiya		
	A	B	C
Oshdi	14	47	16
O'zgarmadi	22	37	7
Kamaydi	20	25	2

Qo'llanilgan texnologiyalar mehnat unimdorligiga ta'sir etmaydi, deb qarash mumkinmi? $\alpha=0.1$ deb oling.

Javoblar

I qism. Ehtimollar nazariyasi

1. $p=0,2$; 2. $4/9$; 3. $P(A)=\frac{5}{36}$; $P(B)=\frac{4}{18}$; $P(C)=\frac{11}{36}$; 4. $P_8=8!$; 5. $\frac{1}{720}$; 6. a) 0,6; b) 0,3;
c) 0,9; 7. a) 0,6; b) 0,4; c) $48/95$; 8. $P_4(0)=P_4(4)=\frac{14}{323} \approx 0,04334$; 9.

a) $\approx 0,57$; b) $\frac{356}{357}$; 10. $\frac{1}{6}$; 11. $\frac{C_M^m C_{N-m}^{n-m}}{C_N^n}$; 12. $\frac{C_N^n}{C_{M+N-1}^M}$; 13. $\frac{1}{120}$; 14. $\frac{1}{360}$; 15.

a) 0,384; b) 0,096; c) 0,008; 16. a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{1}{3}$; 17. $\frac{m}{m+n}$; 18. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; 19.

$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$; 20. $\frac{2}{9}$; 21. $0,28959 \cdot 10^{-2}$; 22. $\frac{13}{20}$; 23.

a) $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 10^5}$; b) $\frac{3^6}{9 \cdot 10^5}$; 24. $\frac{5}{22}$; 25. $\frac{5}{9}$; 26. 0,4162; 27. $\frac{2}{23}$; 28.

a) $\frac{5}{72}$; b) $\frac{5}{12}$; c) $\frac{5}{9}$; 29. $\frac{1}{120}$; 30. $\frac{1}{120}$; 31. 0,00033; 32. $\frac{7}{15}$; 33. $1/11$; 34. 0,932; 35.

$N=4200$; $2/15$; 36. $P(A)=14/323$; $P(B)=125/969$; 37. $p=\frac{1}{120}$; 38. $\frac{1}{T^{p-1}}$; 39.

$P(A)=\frac{1295}{1296}$; $P(B)=\frac{5}{144}$; 40. $P(A)=\frac{1}{143}$; $P(B)=\frac{2}{91}$; $P(C)=\frac{5}{144}$; 41. 180;

42. 0,9; 44. $\frac{2}{\pi\sqrt{3}}$; 45. $\frac{2}{\pi}$; 46. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$; 47. $p \approx 0,38$; 48. $\frac{\pi}{4}$; 49. $\frac{2}{3}$; 50. $\frac{2}{3}$; 51.

$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; 52. $\frac{1}{4}$; 53. $139/1152$; 54. 0,237; 55. $2l/(\pi/a)$; 56.

$$P(A) = \begin{cases} \frac{\pi a^2}{4}, & \text{agar } 0 \leq a < 1, \\ \sqrt{a^2 - 1} + \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{1}{a} - \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \right), & \text{agar } 1 \leq a < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{agar } a \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

57. $P(A) = \frac{2}{3}$; $P(B) = \frac{1}{12}$; 58. $\frac{1}{4}$; 59. $3 \times P_6 = 3 \times 6!$; 60. a) $9 \times (10^4 - 1)$, b) $26 \times (10^4 - 1)$; 61. 60; 62. A_{12}^7 ; 63. 120; 64. $\frac{\pi}{4}$; 65. $\frac{\pi}{24}$; 66. 356; 67. 2^6 ; 68. 1500; 69. 60; $\frac{3}{5}$; 70. 0,18; 71. a) 0,188; b) 0,452; c) 0,336; 72. $\frac{57}{115}$; 73. a) $\frac{1}{720}$; b) $\frac{1}{1000}$; 74. $\frac{20}{31}$; 75. $\frac{1}{6}$; 76. 0,384; 77. $\frac{5}{24}$; 78. $\frac{8}{65}$; 79. $\frac{23}{24}$; 80. $\frac{7}{9}$; 81. $0,95^3$; 82. $\frac{1}{3}$; 83. $\frac{15}{16}$; 84. 0,388; 85. 0,9375; 86. 0,5; 87. 0,8; 88. 0,76; 89. 0,826; 90. 0,93; 91. $\frac{67}{91}$; 92. 0,26; 93. $\frac{53}{95}$; 95. $1/n$ ga teng. k ga bog'liq emas; 96. $3/8$; 97. $1 - 3p_2 p_3^2$; 98. a) 0,348; b) 0,984; 99. a) 0,533; b) 0,467; 100. $\frac{1}{3}$; 101. 0,32; 102. 0,58; 103. $3/5 = 12\%/20\%$; 104. 0,78; 105. 0,5; 106. $3/7$; 107. $5/11$; 108. $9/11$; 109. $2/3$; 110. 0,285; 111. $135/139$; 112. B_1 ; 113. $5/7$; 114. a) 0,4; b) $1/3$; 115. $P(A) = \frac{1 + C_7^5 + C_{13}^5}{C_{25}^5}$; 116. 59; 117. $P(A) = 0,056$; 118. a) $P(A) = 0,57$; b) $P_A(H_2) = 0,175$; 119. 0,17; 121. a) $1/3$; b) $1/3$; 122. 0,0715; 123. 0,37; 124. $3/7$; 125. $\approx 0,2541$; 126. 0,0512; 127. a) $21/32$; b) $1023/1024$; 128. a) $1/4$ va $7/32$; b) $5/16$ va $93/256$; 129. 4 martadan 2 marta gerb tushish ehtimoli katta; 130. 0,0214; 131. a) 0,00038; b) 0,8999; 132. a) 0,774; b) 0,0021; 133. $k_0 = 5$; 134. $k_0 = 3$; $P_{10}(3) = 0,25$; 135. $P_{10}(5) = 63/256$; 136. 0,164; 137. 0,1323; 138. 12 partiyalik ehtimolliroq; 139. 0,203; 140. $P(A) = 0,216$, $P(B) = 0,189$, $P(C) = 0,135$; 141. $P(A) \approx 0,012$, $P(B) \approx 1,144 \cdot 10^{-4}$, $P(C) \approx 0,246$, $P(D) \approx 2^{-10} \approx 10^{-3}$; 142. $P(B) = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}$; 143. $\approx 0,5$; 144. a) 0,201; b) 0,677; 145. a) 0,945; b) 0,172; 146. a) 0,081; b) 0,213; 147. 0,9477; 148. 2; 150. 0,2966; 151. 0,999; 152. $0,496 \cdot 10^{-4}$; 153. 0,9938; 154. 0,92; 155. a) 0,06313; b) 0,981; c) 0,019; 156. a) 0,224; b) 0,1992; c) 0,5768; g) 0,95; 157. a) 0,993; b) 0,561; 158. 0,1005; 159. 0,125; 160. $P(A) < 0,0001$, $P(B) \geq 0,9994$, $P(C) \geq 0,9015$, $P(D) \leq 0,2578$; 161. 127 marotaba; 162. 753; 163. 300; 164. a) 0,0842; b) 0,5595; 165. 0,2743; 166. 0,14653; 0,19537; 0,15629; 167. 0,804; 168. 0,0708; 169. 0,9904; 170. 0,09022; 171. 0,26424;

173.

X	0	1
P	$5/6$	$1/6$

174.

X	0	1	2
P	$1/45$	$16/45$	$28/45$

176.

X	0	1	2	3	4
P	$0,6561$	$0,2916$	$0,0486$	$0,0036$	$0,002$

177. $P(X = k) = C_4^k (0,5)^4$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$;

178.

X	0	1	2	3
P	$0,04$	$0,26$	$0,46$	$0,24$

179.

X	0	1	2	3	4
P	$7/99$	$35/99$	$14/33$	$14/99$	$1/99$

180.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

181.

X	0	1	2	3
P	1/64	9/64	27/64	27/64

182.

X	0	1	2	3	4
P	1/42	5/21	10/21	5/21	1/42

183.

$P(Z = k) = (k - 1)p^2 q^{k-2}$, $k = 2, 3, \dots$; 184. Z tasodifiy miqdor $\lambda_1 + \lambda_2$ parametrli Puasson taqsimot qonunga ega. 185. $B(n_1 + n_2, p)$

186. $P(X = i) = \frac{C_5^i \cdot C_{25}^{15-i}}{C_{30}^{15}}; \frac{11}{522}, i = 1, 2, \dots$;

187. $P(X = i) = C_5^i 0,97^i \cdot 0,03^{5-i}; 0,1413$;

188. $P(X = i) = C_{10}^i 0,2^i \cdot 0,8^{10-i}; 0,6242$;

189. $P(X = i) = C_5^i 0,2^i \cdot 0,8^{5-i}$; 190. $P(X = i) = C_{10}^i 0,1^i \cdot 0,9^{10-i}$;

191. a) $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda = 5$; c) 0,87535; d) 0,00674;

193.

X	1	2	3	4
P	0,8	0,12	0,064	0,0096

194.

X	1	2	3	4
P	0,7	0,24	0,042	0,0144

195. $D(X)=15,21$; $\sigma(X) = 3,9$; 196. $M(X)=3,5$; $D(X)=2,92$;

197. $M(X)=12/7$; 198. $M(X)=0,5$; $D(X)=3/8$; $\sigma(X) = 0,612$;

199.

X	0	1	2
P	7/15	7/15	1/15

$M(X)=3/5$;

200.

X	1	2	3	4
P	p	pq	pq^2	q^3

$D(X) \approx 0,2985$; 202. $D(X) = 61$; 203. $M(X) = 9$; $D(X) = 40$;

209. $D(X) \approx 8,545$; $\sigma(X) \approx 2,923$; 210. $D(X) = 0,8$;

212.

X	1	2
P	0,6	0,4

213.

X	1	3
-----	---	---

P	0,2	0,8
-----	-----	-----

215. $M(X) = \frac{1-q^5}{p};$

X	1	2	3	4	5
P	p	pq	pq^2	pq^3	q^4

216. $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ 217. $p_6 \approx 1.22 \cdot 10^{-7}, p_5 \approx 2.85 \cdot 10^{-5};$

218. $11/42$; 219. $P(x=i) = C_2^i 0,5^i \cdot 0,5^{2-i} = 0,25 C_2^i, i = 0,1,2,...; M(X) = 1; D(X) = 1/2$

220. $P(x=i) = 1/6; M(X) = 3,5; D(X) = 35/12$

221. $M(X) = 29,85; D(X) = 71,9775;$

222.

X	0	10 mln	20 mln	30 mln	4 mln
P	$2/5$	$1/3$	$1/6$	$1/12$	$1/60$

$M(X) = 29,85; D(X) = 71,9775;$

223. $M(X) = 1,95; D(X) = 0,6475;$

224. $P(x=i) = 0,6^{i-1} \cdot 0,4; i = 1,2,...; M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2};$

225. $M(X) = 2,8; D(X) = 0,84; 0,7599;$ 226. $M(X) = 8; D(X) = 8;$ 227.

$P_{15}(k \geq 10) = P_{15}(10) + P_{15}(11) + ... + P_{15}(15);$ 228.

$P_{15}(k \geq 10) = P_{15}(10) + P_{15}(11) + ... + P_{15}(15);$ 229.

$M(X) = 10; \lambda_{15 \min} = \frac{10}{4}; P_{15 \min}(0) = e^{-\frac{10}{4}};$ 230. $M(X) = D(X) = 7; e^{-7};$

$$232. \lambda_{3\min} = 1; \lambda_{15\min} = 5; P_{15\min}(k \geq 3) = 1 - P_{15\min}(0 \leq k \leq 2);$$

$$233. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} & x \leq 0, \\ \cos x, & \text{agar} & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{agar} & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$234. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} & x \leq 0, \\ 1 - \cos x, & \text{agar} & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{agar} & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$235. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} & x \leq \frac{\pi}{6}, \\ -\cos x, & \text{agar} & \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{agar} & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$236. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & \text{agar} & 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{agar} & x > 2. \end{cases}$$

$$237. C = \frac{1}{2\pi}; 238. C = \frac{1}{2\pi}; 239. C = \frac{4}{\pi - \ln 4};$$

$$240. P_1 = P(0,25 < X < 0,75) = \frac{1}{2}; P_4(3) = 0,25;$$

$$241. \approx 0,41347;$$

242. 0,77453;

$$243. A = \frac{1}{2}; F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sin^2 \frac{x}{2}, & \text{agar } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{agar } x > \pi. \end{cases}$$

244. 0,6826; 245. 0,25; 246. 0,9544; 247. $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$; 0,5468;

248. $a > 0$, $b = 1/2$, $C = 1/\pi$; 249. $a = 2$ parametrli Simpson taqsimot qonuni. 250. $F_U(u) = 1 - (1 - F(u))^2$, $F_V(v) = F^2(v)$

$$251. f_z(z) = \begin{cases} 0, & \text{agar } z \leq 0, \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\ell^{-\lambda_1 z} - \ell^{-\lambda_2 z}), & \text{agar } z > 0. \end{cases}$$

$$252. f_z(z) = \begin{cases} 0, & \text{agar } z \leq 0, \\ \lambda^2 z \ell^{-\lambda z}, & \text{agar } z > 0. \end{cases}$$

253. $M(X) = 1,5$; $D(X) = 0,15$;

254. $M(X) = \frac{\pi - 1}{3}$; $D(X) = \frac{\pi - 3}{9}$; $\sigma(X) \approx 0,1245$;

255. $M(X) = 0,1$; $D(X) = 0,01$; $\sigma(X) \approx 0,1$;

256. $M(X) = 0$; $D(X) \approx 0,4649$; $\sigma(X) \approx 0,68$;

257. $M(X) = 3$; $D(X) = \frac{1}{3}$; $\sigma(X) = 0,58$;

258. $M(X) = 0,2$; $D(X) = 0,04$; $\sigma(X) \approx 0,2$;

$$259. \quad f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}; \quad 260. \quad M(X) = \frac{2}{3}; D(X) = \frac{1}{18}; \quad 261.$$

$$M(X) = 5; D(X) = 3; \sigma(X) = \sqrt{3}; \quad 262. \quad M(X) = 25; D(X) = 625;$$

$$263. \quad M(X) = 1; D(X) = 25;$$

$$264. \quad M(X) = \infty; \quad 265. \quad M(X) = -1; D(X) = 1;$$

$$266. \quad F(x) = 1 - \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{2} e^{-\lambda x};$$

$$267. \quad a) A = \frac{1}{2}; B = \frac{1}{\pi}; b) f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; c) M(X) \text{ mavjud emas.}$$

$$268. \quad a) A = \frac{1}{2}; b) M(X) = 0; D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2;$$

$$269. \quad M(X) = 0; D(X) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2};$$

$$270. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 1, \\ \frac{1}{6}, & \text{agar } 1 < x \leq 7, \\ 0, & \text{agar } x > 7. \end{cases}$$

$$271. \quad M(X) = \frac{3}{4}; \quad 272. \quad a) A = 1; b) M(X) = 1; \quad 273. \quad M(X) = a; D(X) = 2a^2;$$

$$274. \quad a) A = ah^2; b) M(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}; D(X) = \frac{4-\pi}{4h^2}; \quad 275. \quad M(X) = 4; \quad 276. \quad M(X) = 3;$$

$$277. \quad D(X) = \frac{a^2}{2}; \quad 278. \quad M(X) \text{ va } \text{yuqoriroq tartibli momentlari mavjud emas.} \quad 279. \quad 15; 10 \text{ va}$$

$$3,4; \quad 280. \quad \approx 99.95\%. \quad 281. \quad M(X^2) \approx 1.1842, P(X^2 > 2) \approx 0.8328$$

$$282. a) \sigma = \sqrt{\frac{(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-m\right)}{\frac{\log(b-m)}{a-m}}}, \quad Q(\sigma) = \Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \quad b) \sigma\sqrt{2/\pi}$$

283. 0,4013; 0,58; 284. 516 gramm; 285. a) 0,2206; b) 0,973; c) 0,1144; 286. a) 0,0228; b) 0,9772; c) 0,5385; 287. 0,9; 288. $\varepsilon \geq 2$; 289. 0,2; 290. 0,64; 291. 2/3; 292. 0,84; 293. 0,9; 294. $P(|X - M(X)| < 0,2) \geq 0,69$, (Chebisyev tengsizligi bo'yicha),

$$P(|X - M(X)| < 0,2) = 0,8, \text{ (aniq ehtimol bo'yicha);}$$

295. Qo'llash mumkin; 296. Qo'llash mumkin; 297. Qo'llash mumkin; 298. Qo'llash mumkin; 299. $P(|X - M(X)| < 0,3) \geq 0,89$, (Chebisyev tengsizligi bo'yicha),
 $P(|X - M(X)| < 0,3) = 1$, (aniq ehtimol bo'yicha);

300. $\geq 0,95$; 301. $\leq 0,375$; 302. a) $\geq 0,66$; b) $\geq 0,96$; 303. 1000 marotaba; 304. 19048 marotaba; 305. a) $\approx 0,8944$; b) $\approx 0,44$; 306. Chebishevda 0.08944, MLT da 0.0392. 307. Chebishevda 0.96, MLT da 0.9999; 308. Chebishevda 0.84, MLT da 0.9876; 309. $\geq 0,99$;

II-qism. Matematik statistika elementlari

330. $D_T = 8,04$; 331. $\bar{x}_T = 1269$; 332. $\bar{x}_T = 5,76$; 333. $\bar{x}_T = 3,75$; $D_T = 0,5375$; 334. $D_T = 12602,7$; 335. $D_T = 0,32$; 336. $D_T = 0,5916$; 337. $S_T = 3,075$; 338. $S_T = 9,49$; 339. $D_T = 167,29$; 340. $D_T = 4,89$; 341. $\bar{x}_T = 166$; $D_T = 4,76$; 342. mediana va moda $h_n = d_n = 19$, $M(X) = 17,225$; $D(X) = 19,1744$; 343. mediana va moda $h_n = d_n = 70$, $M(X) = 69,84$; $D(X) = 9,2144$; 344. mediana va moda $h_n = d_n = 6$, $M(X) = 5,9389$; $D(X) = 1,3079$; 356. Orange Electronicsning $M(X)$ eng katta va $M(X)/\sigma_x$ eng kichik. 357. $M(X) = 84,75$; $\sigma_x = 13,4606$; assimetriya $\gamma_1 = 0,4122$; eksnessiya $\gamma_2 = 1,5929$; 358. $M(X) = 225,1667$; $D(X) = 48,142$; $\sigma_x = 6,9384$; 359. $\delta = 2,248$; 360. (38.469; 46.169); 361. $24948 < a < 25052$; 362. $23,8 < a < 25,4$; 363. a) $0 < \sigma < 14,28$; b) $0 < \sigma^2 < 203,902$; 364. $23,38 < a < 36,82$;

365. $7,63 < a < 12,77$; 366. $n = 179$; 367. $n = 81$; 368. (0,0777; 3,9223); 369. (-0,167; 1,0004); 370. (0,266; 0,454); 371. a) (0,012; 0,038); b) 88 ta; 372. (1,61; 2,39); 373. (2,00; 2,60); 374. $p = 0,997$; 375. $\bar{x}_{y=2} = 4,4$; $\bar{x}_{y=3} = \frac{11}{3}$; $\bar{x}_{y=4} = \frac{59}{12}$;

376. $\bar{y}_{x=3} = 7,571$; $\bar{y}_{x=3,5} = 8,714$; $\bar{y}_{x=4} = 9,667$; $\bar{y}_{x=4,5} = 10,6$; $\bar{y}_{x=5} = 11,667$; 377. $r = -1/6$; 378. $r = 0,997$; 379. $r = -0,1887$; 381. $\bar{x}_{y=0} = 1$; $\bar{x}_{y=2} = 7,6667$; $\bar{x}_{y=3} = 21,88$; 382. $\bar{y}_{x=6} = 1,125$; $\bar{y}_{x=30} = 3,125$; $\bar{y}_{x=5} = 4$; 384. $r = 0,95757$; 385. $r = 0,92395$; 386. $r = 0,98488$;

389. $\bar{x} = 0.85$; $\bar{y} = 0.23$; $\sigma_x^2 = 1.805$; $\sigma_y^2 = 0.00719$; $r = -0.503$;
 $\bar{y}_x = -0.032x + 0.26$; $\bar{x}_y = -7.97y + 2.68$.

390.

$\bar{x} = 5.5$; $\bar{y} = 2.94$; $\sigma_x^2 = 7.92$; $\sigma_y^2 = 6.80$; $r = 0.964$;
 $\bar{y}_x = 0.89x - 1.97$; $\bar{x}_y = 1.04y + 2.44$.

391.

$\bar{x} = 0.475$; $\bar{y} = 39.5$; $\sigma_x^2 = 0.087$; $\sigma_y^2 = 234.33$; $r = 0.981$;
 $\bar{y}_x = 50.77x + 15.39$; $\bar{x}_y = 2.57y + 0.11$.

392.

$\bar{x} = 8.5$; $\bar{y} = 0.79$; $\sigma_x^2 = 28.5$; $\sigma_y^2 = 0.32$; $r = 0.972$;
 $\bar{y}_x = 0.1x - 0.11$; $\bar{x}_y = -6.94y + 15.44$.

393.

$\bar{x} = 4.5$; $\bar{y} = 0.75$; $\sigma_x^2 = 0.907$; $\sigma_y^2 = 0.133$; $r = 0.932$;
 $\bar{y}_x = 0.36x - 853$; $\bar{x}_y = 2.44y + 2.67$.

394.

$\bar{x} = 0.85$; $\bar{y} = 2.07$; $\sigma_x^2 = 0.23$; $\sigma_y^2 = 1.64$; $r = 0.938$;
 $\bar{y}_x = 2.52x - 7.67$; $\bar{x}_y = 0.35y + 0.29$.

395. $\bar{y}_x = 1,45x - 10,36$; 396. $\bar{y}_x = 1,92x - 101,6$; $\bar{x}_y = 0,12y + 3,7$; 397.
 $\bar{y}_x = 4x - 57,8$; $\bar{x}_y = 0,19y + 3,1$; 398. $\bar{y}_x = 0.396x^2 - 0,173x + 0.265$; 399.
 $\bar{y}_x = 1.019x^2 - 0.869x + 1.128$; 400. $\bar{y}_x = 6.904x^2 + 9.791x + 16.887$; 401.
 $\bar{y}_x = 0.1x^2 - 0.106x + 0.226$; 402.

$$\begin{aligned}\bar{y}_x &= 320x^2 - 13,01x + 9,9; & \eta_{y_x} &= 0,99; \\ \bar{x}_y &= 2,8y^2 + 0,02y + 3,18; & \eta_{y_x} &= 0,96;\end{aligned}\quad 403.$$

404. $\bar{x}_y = 2,29y^2 - 1,25y - 1,25$; $\eta_{y_x} = 0,92$; 405. $R = 0,815$; $Z = 1,07x + 0,59y + 1,8$;
406. $R = 0,739$; $Z = -1,42x - 0,26y + 2,75$; 407. $R = 0,99$; $Z = 2,80x + 1,07y - 94,55$;
408. $R = 0,933$; $Z = 0,91x - 0,059y + 2,21$;

409. H_1, H_2, H_3 - statistik gipoteza; H_1 - oddiy, H_2, H_3 - murakkab. 410. H_1 - oddiy, H_2, H_3, H_4 - murakkab statistik gipoteza; 411. a) 1-tur xatolik; b) 2-tur xatolik; c) xatolik yuz bergani yo'q; d) xatolik yuz bergani yo'q; 412. a) $\{0,1,2,3,4,5\}$, $\Gamma = \{0,1,2,3,4\}$, $B(5,p)$; b) H_0 : qurilma yaroqli, $p=0,99$; c) H_1 : qurilma yaroqsiz, $p=0,40$; d) $\alpha \approx 0,05$; $\beta \approx 0,01$. 413. Yaroqsiz mahsulotlar soni, $\{0,1,2,\dots,10\}$, $\{2,3,\dots,10\}$; b) $B(10,p)$; c) H_0 : $p=0,05$; ta'minotchi haq, H_1 : $p=0,1$, iste'molchi haq; d) $\alpha \approx 0,086$; $\beta \approx 0,736$. 414. $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ dan $u_{0,99} = 2,33$ bo'lgani uchun $(40,2 - 40)\sqrt{36} = 1,2 < 2,33$ H_0 qabul qilinadi.

$$\tilde{A} = \left\{ \bar{x} > 40 + \frac{2,33}{\sqrt{36}} \right\} = \{ \bar{x} > 40,39 \}. \quad 415. n=73, K_n = \{ \bar{x} > 40,15 \}$$

416. Normal taqsimotga mos keladi. 417. Rad etishga asos yo'q bo'lganligi uchun uni qabul qilinadi. 418. Rad etishga asos yo'q; normal taqsimotga mos keladi. 419. Rad etishga asos yo'q; normal taqsimotga mos keladi. 420. Ha. Har ikkala tanga simmetrik.

421. Yoq. To'g'ri emas. 422. Normal taqsimlangan deb qarash mumkin. 423. Ha, uni simmetrik deb qarash mumkin. 424. Ha. 425. H_0 inkor qilinadi. 426. bog'liq emas. 427. Yo'q ta'sir etadi.

1-Ilova.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya qiymatlari jadvali.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	0956
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0180	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-Ilova.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ funksiya qiymatlari jadvali.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265

0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3685	1.57	0.4418
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4505
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4515
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4065	1.77	0.4616
0.43	0.1664	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625

0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633
------	--------	------	--------	------	--------	------	--------

davomi

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	X	$\Phi(x)$
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.54	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499828
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

3-Ilova.

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ qiymatlar jadvali.

γ	0.95	0.99	0.999	γ	0.95	0.99	0.999
----------	------	------	-------	----------	------	------	-------

n				n			
5	2.78	4.60	8.61	20	2.093	2.861	3.883
6	2.57	4.03	6.86	25	2.064	2.797	3.745
7	2.45	3.71	5.96	30	2.045	2.756	3.659
8	2.37	3.50	5.41	35	2.032	2.729	3.600
9	2.31	3.36	5.04	40	2.023	2.708	3.558
10	2.26	3.25	4.78	45	2.016	2.692	3.527
11	2.23	3.17	4.59	50	2.009	2.679	3.502
12	2.20	3.11	4.44	60	2.001	2.662	3.464
13	2.18	3.06	4.32	70	1.996	2.649	3.439
14	2.16	3.01	4.22	80	1.001	2.640	3.418
15	2.15	2.98	4.14	90	1.987	2.633	3.403
16	2.13	2.95	4.07	100	1.984	2.927	3.392
17	2.12	2.92	4.02	120	1.980	2.617	3.374
18	2.11	2.90	3.97	∞	1.960	2.576	3.291
19	2.10	2.88	3.92				

4-Ilova.

$q_\gamma = q(\gamma, n)$ qiymatlar jadvali

γ	0.95	0.99	0.999	γ	0.95	0.99	0.999
n				n			
5	1.37	2.67	5.64	20	0.37	0.58	0.88
6	1.09	2.01	3.88	25	0.32	0.49	0.73
7	0.92	1.62	2.98	30	0.28	0.43	0.63
8	0.80	1.38	2.42	35	0.26	0.38	0.56
9	0.71	1.20	2.06	40	0.24	0.35	0.50
10	0.65	1.08	1.80	45	0.22	0.32	0.46
11	0.59	0.98	1.60	50	0.21	0.30	0.43
12	0.55	0.90	0.45	60	0.188	0.269	0.38
13	0.52	0.83	0.33	70	0.174	0.245	0.34
14	0.48	0.78	0.23	80	0.161	0.226	0.31

15	0.46	0.73	0.15	90	0.151	0.211	0.29
16	0.44	0.70	1.07	100	0.143	0.198	0.27
17	0.42	0.66	1.01	150	0.115	0.160	0.211
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0.136	0.185
19	0.39	0.60	0.92	250	0.089	0.120	0.162

5-Ilova.

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari

Ozdluk darajalari soni k	α qiymatdorlik darajasi					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	15.1	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21.0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26

21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.9	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.0	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. -330 стр.
2. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник. - М.: Инфра-М., 1997. -350 стр.
3. Бабаджанов Ш. Ш. “Теория вероятностей и математическая статистика”. Курс лекций. Ташкент, ТМИ, 2004. 152 стр.
4. Azlarov T., Abdushukurov J. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to'plami. -T.: 2000. -180 bet.
5. Muxitdinov T., Sagdullaev D., Shoraxmetov Sh. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanidan masalalar to'plami. -T.: 2005. -150 bet.
6. Mamurov E.N., Adirov T.X. «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika». - T.: TMI. 2005. -135 bet.
7. Сборник задач по курсу “Математика в экономике”, в трех частях, “Теория вероятностей”. Учебное пособие под редакцией, Бабайцева В.А., Гисина В.Б. - М.: ИНФРА -М. 2010. 128 стр.
8. Adirov T. X., Hamdamov I. “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar va ularni yechishga oid ko'rsatmalar”. Toshkent. “Iqtisod-moliya”, 2008. 120 bet.
9. Бабаджанов Ш. Ш. “Материалы самостоятельных работ по Теория вероятностей и математическая статистика”. Учебное пособие. Ташкент, ТМИ, 2006. 90 стр.

GLOSSARIY

Inglizcha	O'zbekcha	Ruscha	Izoh
Numeral sequence	Sonli ketma-ketlik.	Числовая последовательность	Sonli ketma-ketlik. Natural sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga mos qo'yuvchi akslantirishga sonli ketma-ketlik deyiladi. Hamda $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ko'rinishida yoziladi.
Limit of Numeral sequence	Sonli ketma-ketlik limiti.	Предел числовой последовательности	Sonli ketma-ketlik limiti. a soni $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik limiti deyiladi, agar $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\exists n_0 \in N$ son topilib, $\forall n > n_0$ natural son uchun $ x_n - a < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa. $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik limiti quyidagicha yoziladi: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
Converges	Yaqinlashuvchi .	Сходящийся	Yaqinlashuvchi. $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik uchun yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi a soni mavjud bo'lsa, bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi.
Uniqueness of the limit	Limitning yagonaligi	Единственность предела	Limitning yagonaligi. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.
Bounded	Chegaralangan .	Ограниченный	Chegaralangan. $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi, agar $\forall n \in N$ uchun $\exists M > 0$ soni topilib $ x_n \leq M$ tengsizlik bajarilsa.
Finite	Chekli.	Конечный	Chekli. Aniq bir qiymatga ega bo'lgan kattalik.
Infinite	Cheksiz.	Бесконечный	Cheksiz. Haqiqiy sonlar to'plamining yuqori chegarasi , quyi chegarasi. Shartli ravishda cheksiz deyiladi.

Compactness	Kompaktlik	Компактный	Kompaktlik. Agar $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, limiti o'ziga tegishli bo'lsa u holda bunday ketma-ketlikka kompakt deyiladi.
Continuity	Uzluksizlik.	Непрерывность	Uzluksizlik. $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ o'rinli bo'lsa.
Cauchy sequences	Koshi ketma-ketligi.	Последовательность Коши	Koshi ketma-ketligi. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlikka Koshi ketma-ketligi deyiladi. $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ son topilib, $\forall n > n_0$ va $\forall m > n_0$ natural sonlar uchun $ x_n - x_m < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.
Fundamental sequences	Fundamental ketma-ketliklar	Фундаментальные последовательности	Fundamental ketma-ketliklar. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ketma-ketlikka fundamental ketma-ketlik deyiladi. $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ son topilib, $\forall n > n_0$ va $\forall m > n_0$ natural sonlar uchun $ x_n - x_m < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.
inverse function	Teskari funksiya	Обратная функция	Teskari funksiya. $y = f^{-1}(x)$ funksiya $y = f(x)$ funksiyaning teskarisi deyiladi, agar $x = f(y)$ tenglik o'rinli bo'lsa.
Increasing function	Kamayuvchi funksiya	Убывающая функция	Kamayuvchi funksiya. $y = f(x)$ funksiya o'zining D sohasida kamayuvchi deyiladi, agar $\forall x_1, x_2 : x_1 > x_2$

			ekanidan $f(x_1) \leq f(x_2)$ ekani kelib chiqsa.
Decreasing function	O'suvchi funksiya	Возрастающая функция	O'suvchi funksiya. $y = f(x)$ funksiya o'zining D sohasida o'suvchi deyiladi, agar $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 > x_2$ ekanidan $f(x_1) \geq f(x_2)$ ekani kelib chiqsa.
a map	Akslantirish	Отображение	Akslantirish. X to'plamning har bir elementiga Y to'plamning yagona elementini mos qo'yishga aytiladi.
Function	Funksiya	Функция	Funksiya. R haqiqiy sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga mos qo'yuvchi akslantirishga aytiladi
Domain region	Aniqlanish soha	Область определения	Aniqlanish soha. Argumentning qabul qila olishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamiga aytiladi. Hamda $domf$ bilan belgalaymiz.
Image region	Qiymatlar sohasi	Область значения	Qiymatlar sohasi. Funksiyaning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari sohasiga aytiladi.
Odd function	Toq funksiya	Нечетная функция	Toq funksiya. $\forall x \in domf$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglikni qanoatlantiradigan funksiyalarga aytiladi.
Even function	Juft funksiya	Четная функция	Juft funksiya. $\forall x \in domf$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglikni qanoatlantiradigan funksiyalarga aytiladi.
Period of function	Funksiyaning davri	Период функции	Funksiyaning davri. $\forall x \in domf$ uchun $\exists T \in R$ topilib $f(x+T) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda T soni funksiyaning davri deyiladi.
Bounded	Chegeralangan funksiya	Ограниченная функция	Chegeralangan funksiya. $y = f(x)$ funksiya

function			chegaralangan deyiladi, agar $\exists M > 0$ soni topilib $ f(x) \leq M$ tengsizlik bajarilsa.
The limit of a function on a point (Heyne definition)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo'yicha)	Предел функции в точке (определение Гейне)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo'yicha). Agar $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in X$, $x_n \neq x_0$) bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n \rightarrow \infty$ da $f(x_n) \rightarrow b$ bo'lsa, b ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va $x \rightarrow x_0$ da $f(x) \rightarrow b$ yoki $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ kabi belgilanadi.
The limit of a function on a point (Cauchy definition)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha)	Предел функции в точке (определение Коши)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilsaki, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun $ f(x) - b < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$. Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$: $ f(x) - b < \varepsilon$ bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.
Limit point	Limit nuqta	Предельная точка	Limit nuqta. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, ($\forall \varepsilon > 0$) atrofida X

			to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \neq x_0 : x - x_0 < \varepsilon$ bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.
Increment of argument	Argument orttirmasi	Приращение аргумента	Argument orttirmasi. Argument orttirmasi deb argument yangi qiymatidan dastlabki qiymatning ayirmasi tushuniladi va u quyidagicha belgilanadi.ar $\Delta x = x - x_0$
Real function	Haqiqiy funksiya	Действительная функция	Haqiqiy funksiya. Faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qila oladigan funksiyalarga haqiqiy funksiya deb ataladi.
Real variable	Haqiqiy o'zgaruvchili	Действительная переменная	Haqiqiy o'zgaruvchili. Haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan funksiyaga haqiqiy o'zgaruvchili funksiya deyiladi.
neighborhood	Atrof	Окрестность	Atrof . x_0 nuqtaning ε atrofi deb quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x \in R$ nuqtalar to'plamiga aytiladi: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$
Independent variable	Erkli o'zgaruvchi	Независимая переменная	Erkli o'zgaruvchi. Erkli o'zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan o'zgaruvchiga aytiladi.
Derivative	Hosila	Производная	Hosila. Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi qiymatiga funksiya hosilasi deyiladi.
Secant	Kesuvchi	Секущий	Kesuvchi. Funksiya grafigining ixtiyoriy ikkita nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa aytiladi.
Tangent	Urinma	Касательный	Urinma. Kesuvchining limit holatiga urinma deyiladi.
time	Vaqt	Время	Vaqt. Nisbiy tushuncha bo'lib, o'lchov birligi soat,sekund,minut kabilar bilan o'lchanadigan

			skalyar oʻsuvchi miqdordir.
Tangent line	Urinma chiziq	Касательная прямая	Urinma. Kesuvchining limit holatiga urinma deyiladi.
Velocity	Tezli	скорость	Tezlik. Jismning bir sekund ichida bosib oʻtgan yoʻliga son jihardan teng boʻlgan kattalikka aytiladi, Oʻlchov birligi <i>metr/sekund</i>
komposition	kompozitsiya	Композиция	kompozitsiya. $f : X \rightarrow Y$ va $g : Y \rightarrow Z$ akslantirishlar kompozitsiyasi deb quyidagi akslantirishga aytiladi. $h = g \circ f$, bu yerda $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ boʻlib $h : X \rightarrow Z$
Continuous function	Uzluksiz funksiya	Непрерывная функция	Uzluksiz funksiya. $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agar $\forall x_0 \in [a, b]$ uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ boʻlsa.
Invertible map	Bir qiymatli akslantirish	Однозначная отображение	Bir qiymatli akslantirish. $f : X \rightarrow Y$ akslantirish bir qiymatli deyiladi, agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $f(x_1) = f(x_2)$ ekanidan $x_1 = x_2$ kelib chiqsa.
Logarithmic derivative	Logarifmik hosila	Логарифмическая производная	Logarifmik hosila. $y = f(x)$ funksiyaning logarifmik hosilasi deb $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ funlsiyaga aytiladi.
Independent variable	Erkli oʻzgaruvchi	Независимая переменная	Bir qiymatli akslantirish. Erkli oʻzgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan oʻzgaruvchiga aytiladi.
Limit point	Limit nuqta.	Предельная точка	Limit nuqta. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$,

			$(\forall \varepsilon > 0)$ atrofida X to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \neq x_0 : x - x_0 < \varepsilon$ bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.
The theorem of de l'Hopital	Lopital teoremasi	Теорема Лопиталья	Lopital teoremasi. Quyidagi aniqmasliklarni ochishda foydalaniladi. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, \infty^0$ Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bo'lsa u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ o'rinli.
Taylor polynomial	Teylor yoyilmasi	Разложение Тейлора	Teylor yoyilmasi. n -tartibli teylor yoyilmasi deb $Tf_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ ko'phadga aytiladi.
Remainder	Qoldiq	Остаток	Qoldiq . n -tartibli teylor qoldig'i deb $o((x - x_0)^n)$ qiymatga aytiladi.
Higher-order derivatives	Yuqori tartibli hosila	Производная высших порядков	Yuqori tartibli hosila. $y = f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi deb quyidagi xossani qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, xususi holda $f^{(0)}(x) = f(x), f^{(1)}(x) = f'(x)$
Continuous function	Uzluksiz funksiya	Непрерывная функция	Uzluksiz funksiya. $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agar $\forall x_0 \in [a, b]$ uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa.
Invertible	Bir qiymatli	Однозначная отображение	Bir qiymatli akslantirish. $f : X \rightarrow Y$ akslantirish bir

map	akslantirish		qiymatli deyiladi , agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $f(x_1) = f(x_2)$ ekanidan $x_1 = x_2$ kelib chiqsa.
Independent variable	Erkli o'zgaruvchi	Независимая переменная	Erkli o'zgaruvchi. Erkli o'zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan o'zgaruvchiga aytiladi.
Primitive function	Boshlang'ich funksiya	Первообразная функция	Boshlang'ich funksiya. $y = F(x)$ funksiya $y = f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi, agar $F'(x) = f(x)$ tenglik bajarilsa.
Indefinite integral	Aniqmas integral	Неопределенный интеграл	Aniqmas integral. $y = f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb $y = F(x) + C$ funksiyalar oilasiga aytiladi, bu yerda $C = const$ va quyidagicha belgilanadi. $\int f(x)dx$
Linearity of the integral	Integralning chiziqliligi	Линейность интеграла	Integralning chiziqliligi. Bu quyidagichadir. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x) + \beta \int g(x)$ Bu yerda $\alpha, \beta = const$
Integration by parts	Bo'laklab integrallash	Интегрирование по частям	Bo'laklab integrallash. Bu quyidagicha xossaga ega. $\int u dv = uv - \int v du$
Real variable	Haqiqiy o'zgaruvchili	Действительная переменная	Haqiqiy o'zgaruvchili. Haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan funksiyaga haqiqiy o'zgaruvchili funksiya deyiladi.
neighborhood	Atrof	Окрестность	Atrof . x_0 nuqtaning ε atrofi deb quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x \in R$ nuqtalar to'plamiga aytiladi: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

